गणित मला नावडे

मेरिलिन बर्न्स

मराठी : डॉ. मधुकर



गणित मला नावडे

मेरिलिन बर्न्स

मराठी : डॉ. मधुकर

या पुस्तकात काय आहे?

काही भली चांगली माणसे म्हणतात ‘मी गणिताचा द्‌वेष करतो/करते.’

असे विशेषतः जे म्हणतात , त्यांना वाटते की गणित=अंकगणित.

काही तर असेही म्हणतात:

‘मला गणिताचे नाव घेतले की ओकारी येते.’

‘गणित हा बावळट लोकांचा विषय आहे.’

‘मला गणित येणे अशक्यप्राय आहे.’

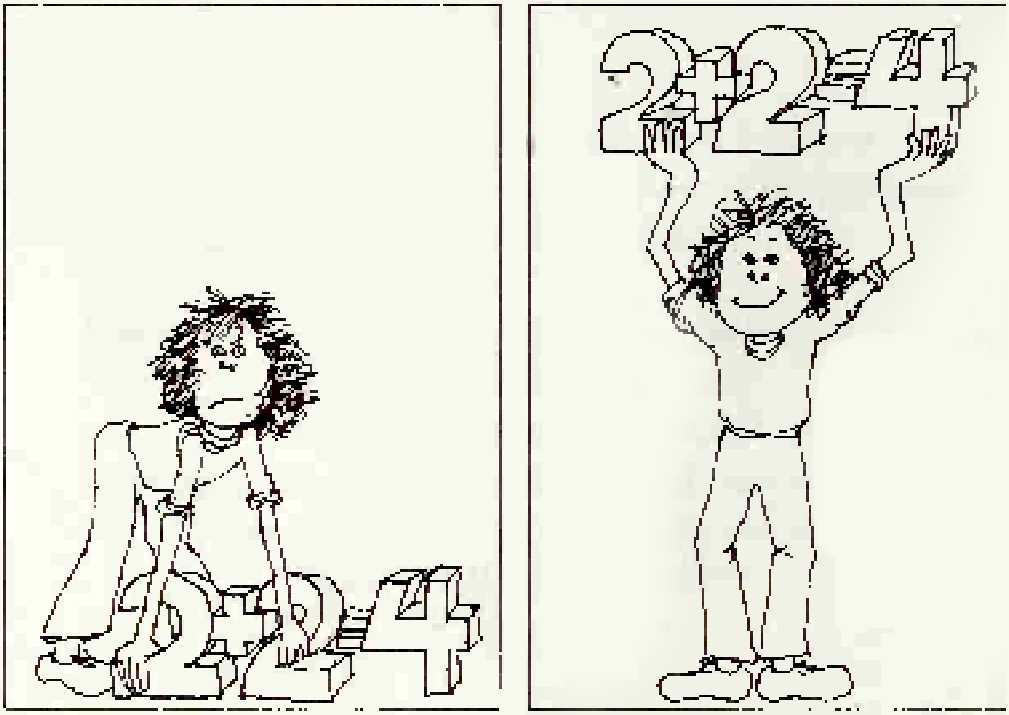
‘ज्यांना गणित आवडते ती माणसेच मला आवडत नाहीत.’

‘गणित वाल्यांचे डोळे डुकरासारखे बुभुक्षित असतात.’

‘गणिताचा उपयोग तरी काही आहे का?’



आता तुम्ही तुम्हाला वाटेल ती गणिताला
शिवी द्या हवी तर. मुळीच हरकत नाही.



या पुस्तकात आपण गणितात कच्च्या मुला मुलींस

सशक्त बनविणार आहोत.

तुम्ही तुमच्या शिक्षकावर वजन पाडणार आहात.

आई बाबांना चकित करणार आहात.

मित्र मैत्रीण यांचेकडून ‘वाहवा’ मिळवणार आहात.

स्वतःलाच शाबासकी देणार आहात.

(खरे तर कुणालाच गणिताची नावड मनापासून नसते; भीती असू शकते.)

तर तुम्ही म्हणाल: हे कसे काय शक्य आहे?



की काही भापकेबाज भाषा वापरणार?

की इतरांनाच भीती दाखवणार?

की आणखी कसली गंमत करणार?

हो खरंय. पण एक गुपित आहे. ते म्हणजे:

गणित कठीण नाही आणि कंटाळवाणे तर मुळीच नाही.

फक्त जो तुमच्या डोक्यात गोंधळ आहे त्याची

नीट अवराअवर   करायला पाहिजे.

एका पावलात आपण कसे ते पाहू.

पण तेवढ्यासाठी हे पुस्तक वाचायला हवे.

तुमची गणिती खूणगाठ आहे: *नमूना* (किंवा pattern).

म्हणजे दिलेल्या नमुन्यावरून किंवा त्या प्रणालीनुसार पुढचा अंदाज करणे.

रस्त्यावरचे गणित

आज शाळेला सुट्टी आहे.

आईने घरात काम काढले आहे म्हणून तुम्हाला बाहेर पाठविले आहे. नुसतेच पाठविले नाही तर सोबत दुपारच्या जेवणासाठी खायचे पदार्थ पण दिले आहेत. तुमचे शाळसोबती बाहेरगावी गेले आहेत. तुमचा खेळायचा चेंडू फाटला आहे. आणि उनाडक्या करायच्या तर खूप ऊन तापले आहे.

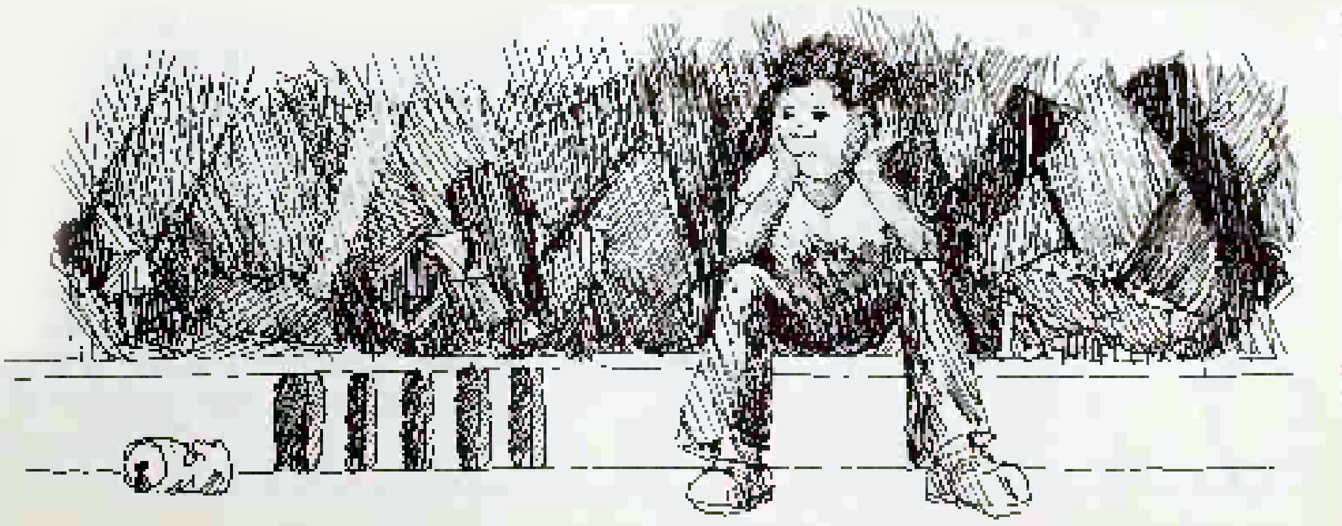
दहा वाजताच तुमचे सँडविच खाऊन झालेले आहे.

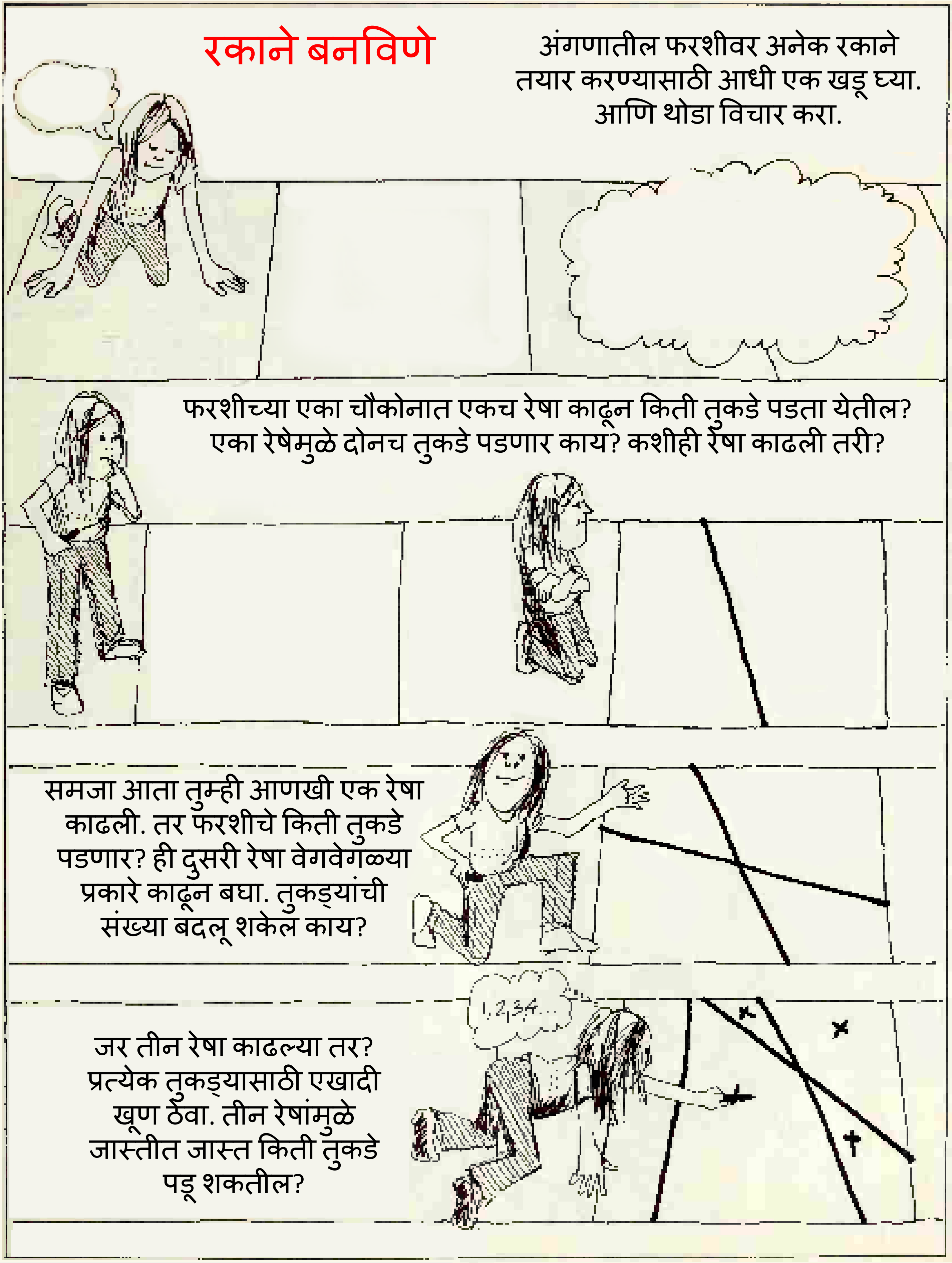
तुम्हाला वाटते आपण काही तरी नवीन करायला हवे.

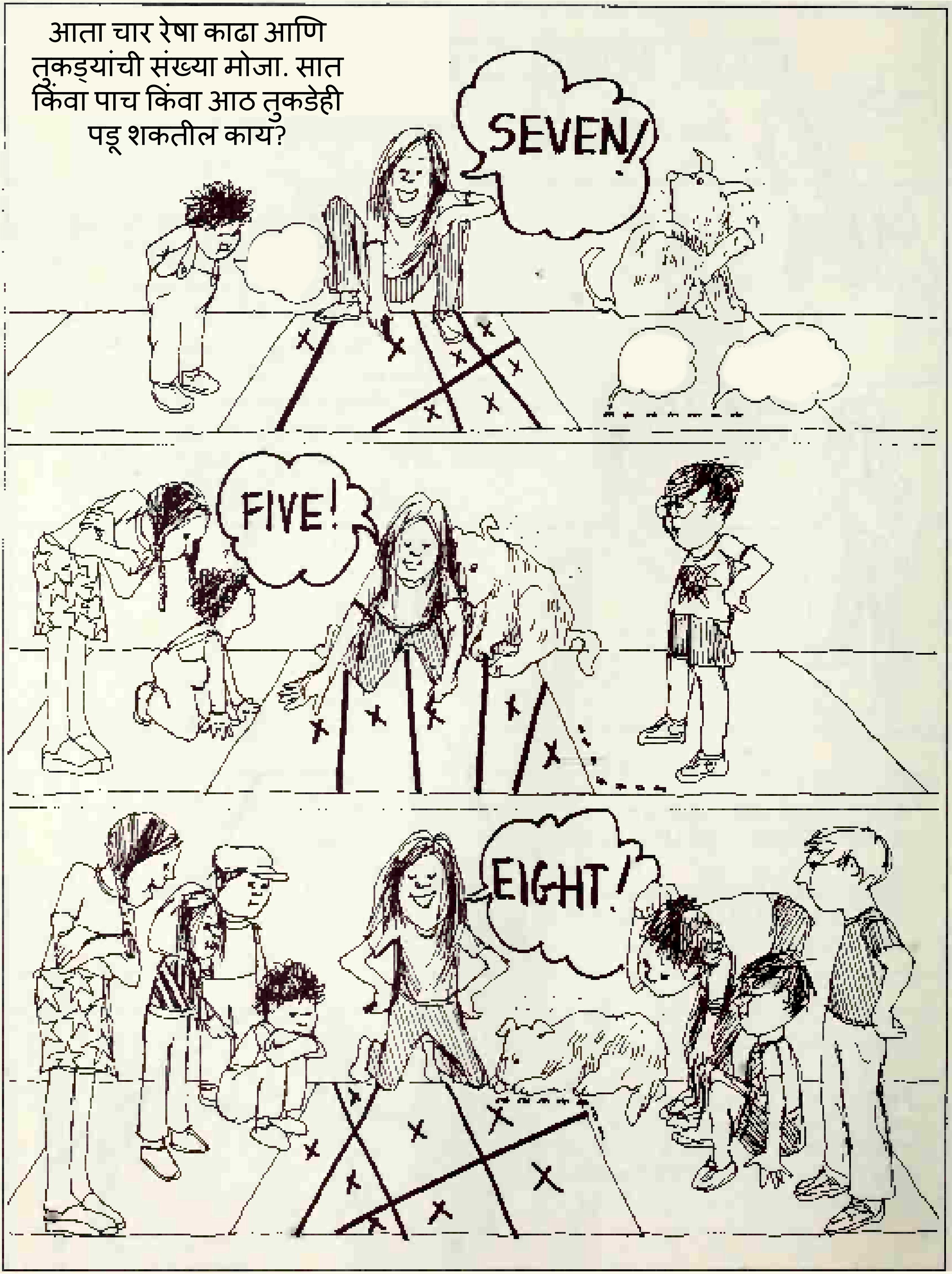
आता काही गणिती दृष्टिकोनातून शेजारयाकडे पाहूया.

जे काही दिसते त्यावर प्रयोग करून पहा.

तिथे जे आहे त्या कडे नवा दृष्टिक्षेप टाका. येणारा जणारांशी गणितविषयी बातचीत करा, मग ते शहाणे सुरते असोत अगर नसोत. अगदी तुमचा मित्र परगावी गेला नसला तरी असे करायला काय हरकत?




रकाने बनविणे
अंगणातील फरशीवर अनेक रकाने तयार करण्यासाठी आधी एक खडू घ्या. आणि थोडा विचार करा.
फरशीच्या एका चौकोनात एकच रेषा काढून किती तुकडे पडता येतील? एका रेषेमुळे दोनच तुकडे पडणार काय? कशीही रेषा काढली तरी?
समजा आता तुम्ही आणखी एक रेषा काढली. तर फरशीचे किती तुकडे पडणार? ही दुसरी रेषा वेगवेगळ्या प्रकारे काढून बघा. तुकड्यांची संख्या बदलू शकेल काय?
1,2,3,4...
जर तीन रेषा काढल्या तर? प्रत्येक तुकड्यासाठी एखादी खूण ठेवा. तीन रेषांमुळे जास्तीत जास्त किती तुकडे पडू शकतील?

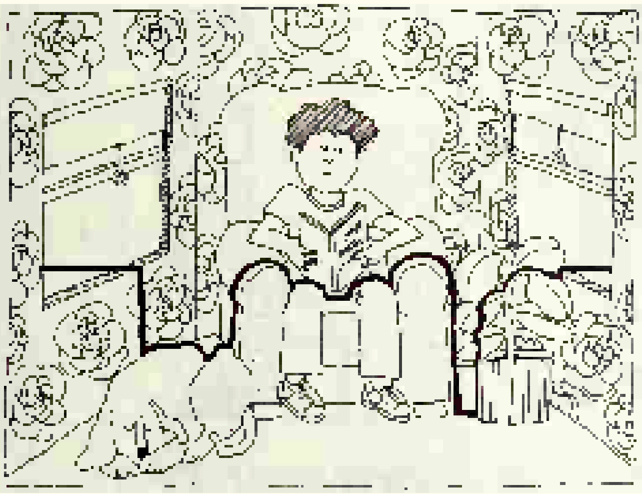

आता चार रेषा काढा आणि तुकड्यांची संख्या मोजा. सात किंवा पाच किंवा आठ तुकडेही पडू शकतील काय?
SEVEN!
FIVE!
EIGHT!

कमीतकमी किती तुकडे?
जास्तीतजास्त किती? सर्व मधल्या
संख्याही मिळू शकतील का?
लक्षात ठेवा रेषा सरळच हव्यात.
तिरक्या चालणार नाहीत.



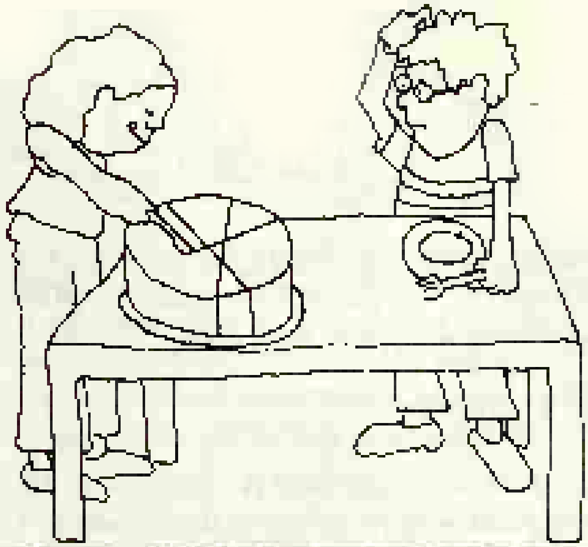
पाच रेषांचे काय? सहाचे?
आता चक्क दहा रेषा पासून किती
तुकडे मिळतील यासाठी
फारतर एक चढाओढ ठेवा.
जर सरळ रेषांची अट नसली
तर काय होईल?

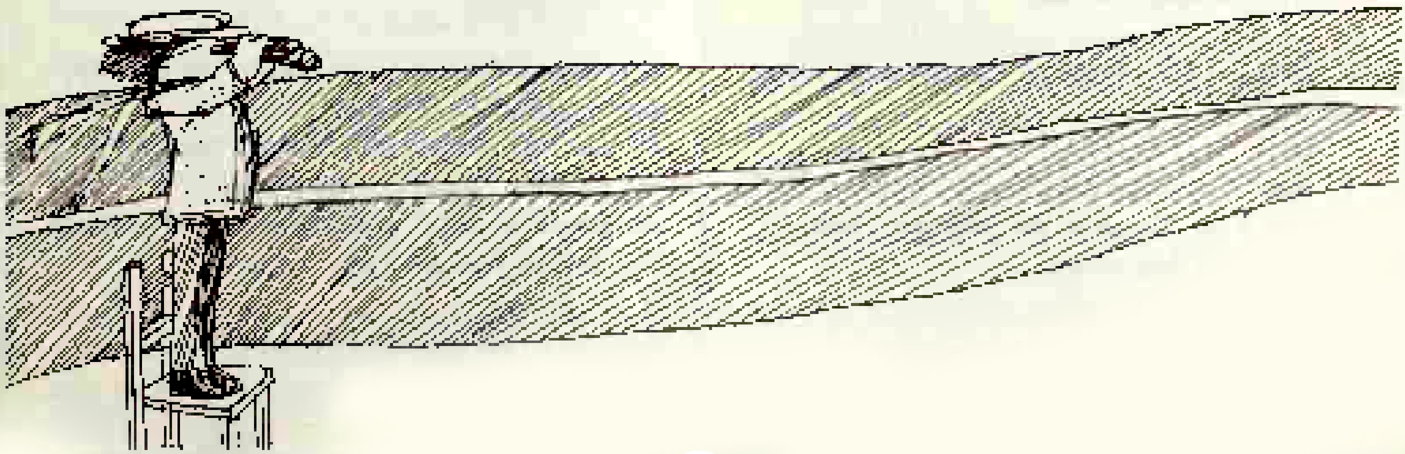
गणितात सरळ रेषेला आदि
नाही आणि अंत ही नाही.



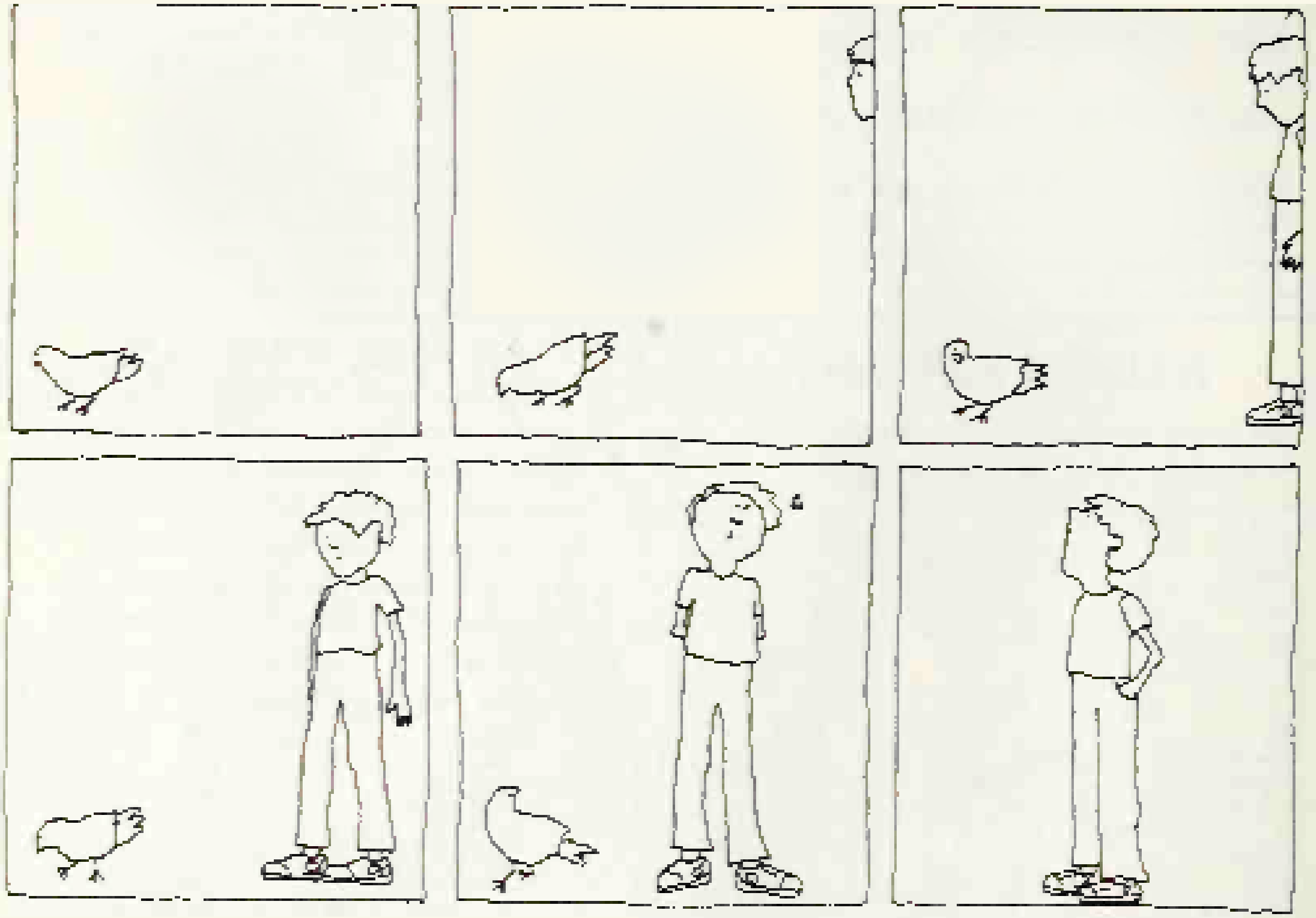
आपण ज्या काढतो त्या खरेतर रेषा
नसून रेषा खंड असतात. रस्त्यावर
आपण काढल्या त्या रेषा की रेषाखंड?

केक कापायचा आणि
(आपल्या भावाचाही वाट आपणच)
खायचा.
केक कापताना भावाशी पैज लावून
पहा की चार रेषा काढून अकरा तुकडे
तुम्ही करू शकाल.
पटकन खाऊन पळ काढा.





कबुतरांविषयी



कबुतर आपल्याला किती
जवळ येऊ देईल?

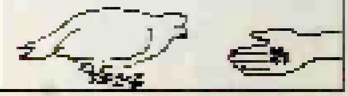
एक कबुतर निवडा. हळू हळू त्याच्या जवळ जा. किती जवळ गेल्यावर ते उडून जाईल याचे निरीक्षण करा. ते उडाले की एक खूण तेथे टाका. कबुतर जेथे होते त्या जागेपासून खुणेचे अंतर मोजा.

असे दहा वेळा करा. या सर्व अंतरात काहे प्रणाली दिसते का?

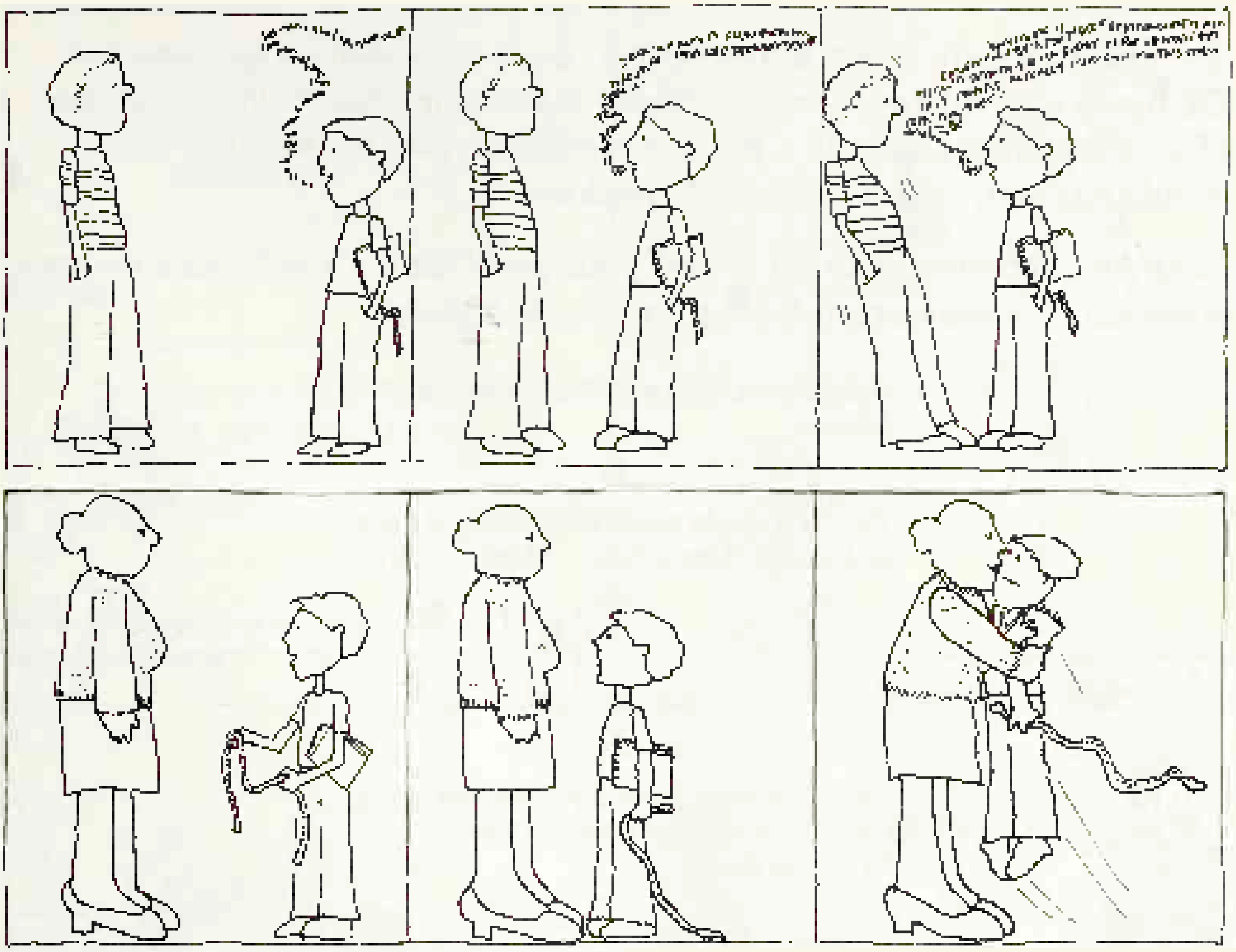
अंतरांची सरासरी काढा.

जर कबूतरांविषयी माहिती जास्त नसेल तर बगळ्यावर हाच प्रयोग करा.

या सर्वाचा गाणिताशी काय संबंध?



माणसांच्या जवळ येण्याबद्दल:



कबुतरांच्या जवळ जाण्याची तुम्हाला सवय झाली असेल. आता हाच प्रयोग माणसांच्या बाबतीत करून पहा. कबुतरांशी काही बोलायच नसते त्यामुळे ते सोप काम आहे. पण माणसाजवळ जाताना असे करून चालणार नाही. म्हणून:

सूचना क्र. 1
तुम्ही काय करताय हे न सांगता काही बाही बोलत रहा आणि हळू हळू जवळ जा.

पण फार जवळ जाण्याने जर माणूस बिचकत असेल तर मागे व्हा किंवा त्याला तुमच्या प्रयोगविषयी सांगा आणि अंतर मोजा.

सूचना क्र. 2
आधी तुमच्या प्रयोगविषयी सांगा आणि मग जवळ जा. फार जवळ गेलात तर ‘सांग’ असे त्याला म्हणा. तसे त्यांनी सांगितले की अंतर मोजा. माणसे अधिक लाजाळू की पक्षी? पुरुष अधिक लाजाळू की स्त्रिया? छोटे अधिक लाजाळू की मोठे?

फरशी आणि चिरा

तुम्ही कधी फुटपाथ वर चालताना साधे चालता की प्रत्येक चिरेवर पाय ठेवत चालता; की चिरेवर पाय पडू नये अशी काळजी घेतच चालता? कुठल्या पद्धतीने जास्त पावले पडतात? एक गृहीतक ठरवा आणि मग प्रयोग सुरू करा. मात्र प्रयोगासाठी काही मोकळा चाकळा वेळ लागेल.

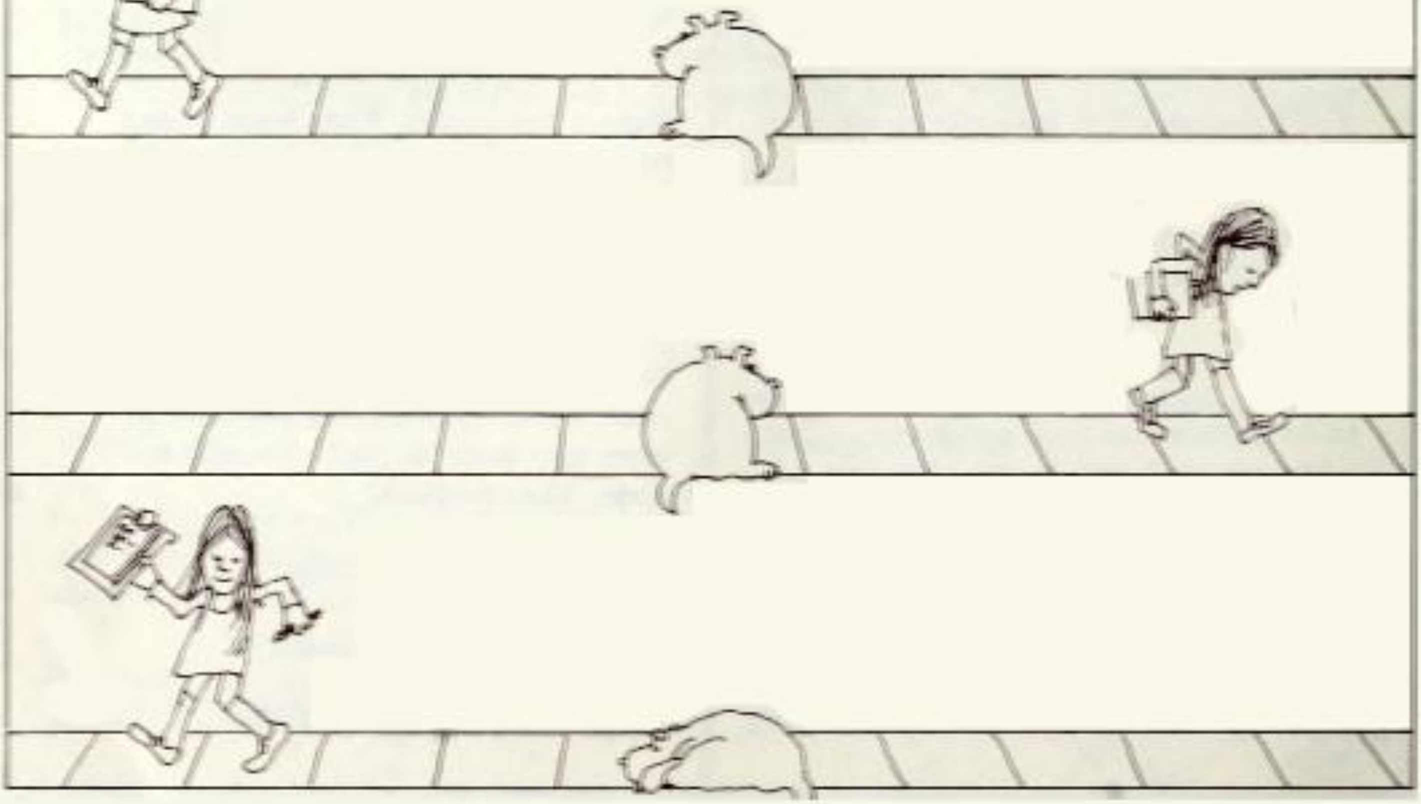
एक लांबलचक फुटपाथ निवडा. आधी साधे चाला व पाऊले मोजा. मग परत तसेच जा आणि परतीची पाऊले मोजा.



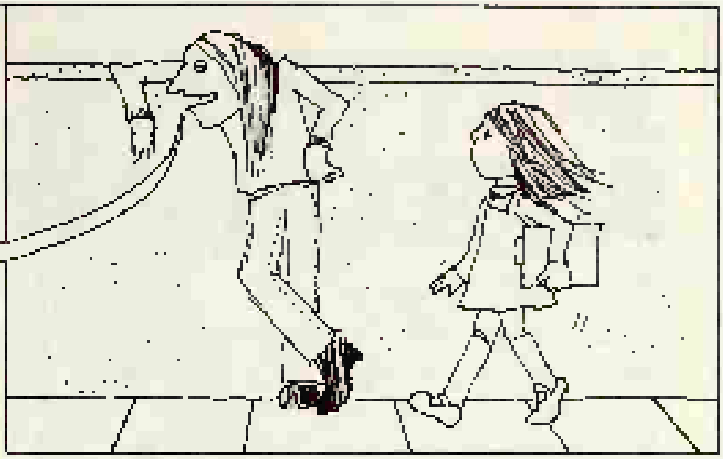




आता प्रत्येक चिरेवर पाय ठेवत तेवढेच अंतर पुढे आणि मागे चाला. पाऊले मोजा.

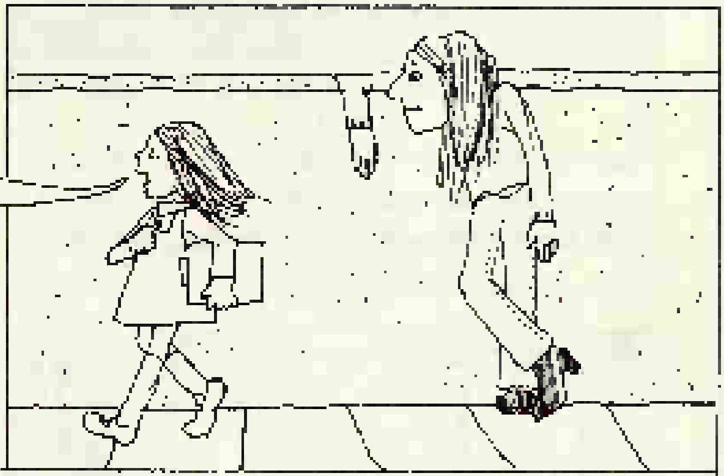


आता चिरेवर पाय न ठेवता तसेच करा. येता जाता कुणी जर म्हटले की



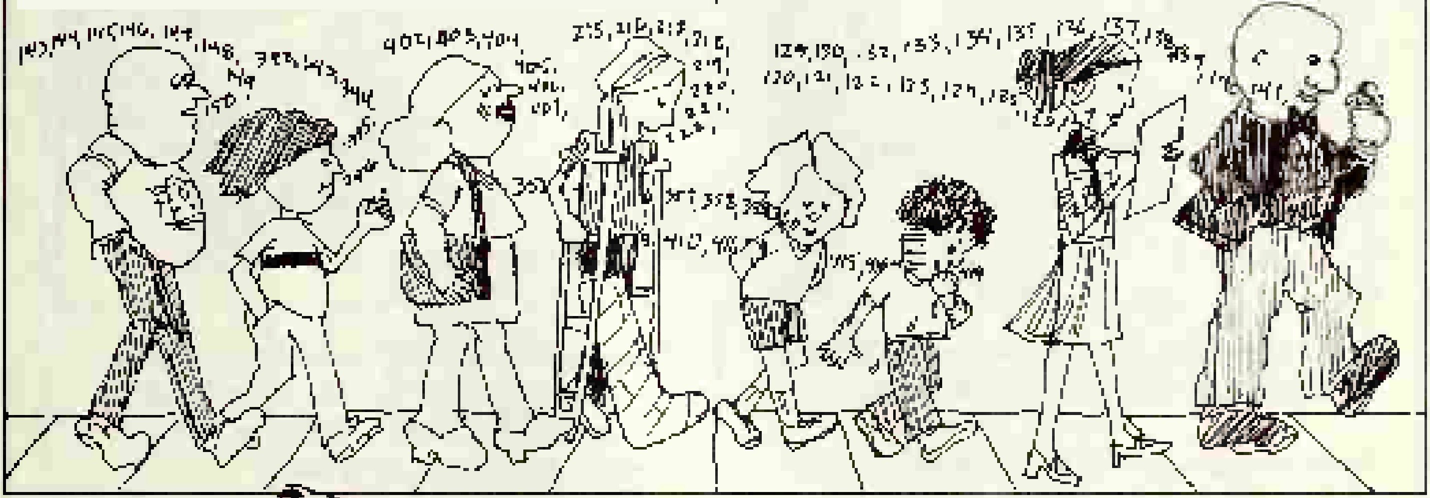
‘काही विशेष काम काढलेयस का?’

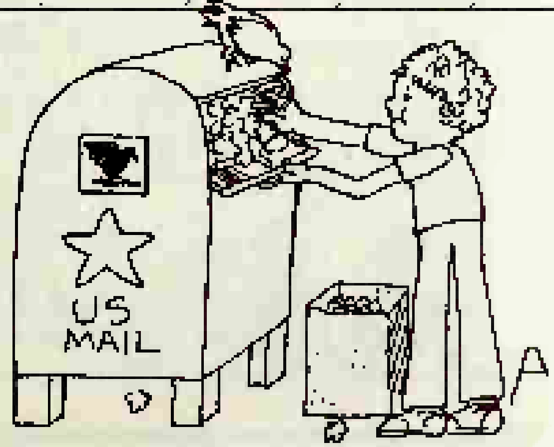
तर म्हणा



‘होय. या रस्त्यावर मी एक गणिती गृहीतक तपासून पहात आहे.’

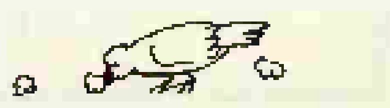
संधि मिळाली की स्वतःचे शहाणपण दाखवणाऱ्यास तुमच्या ज्ञानाने दिपवण्यास विसरू नका.





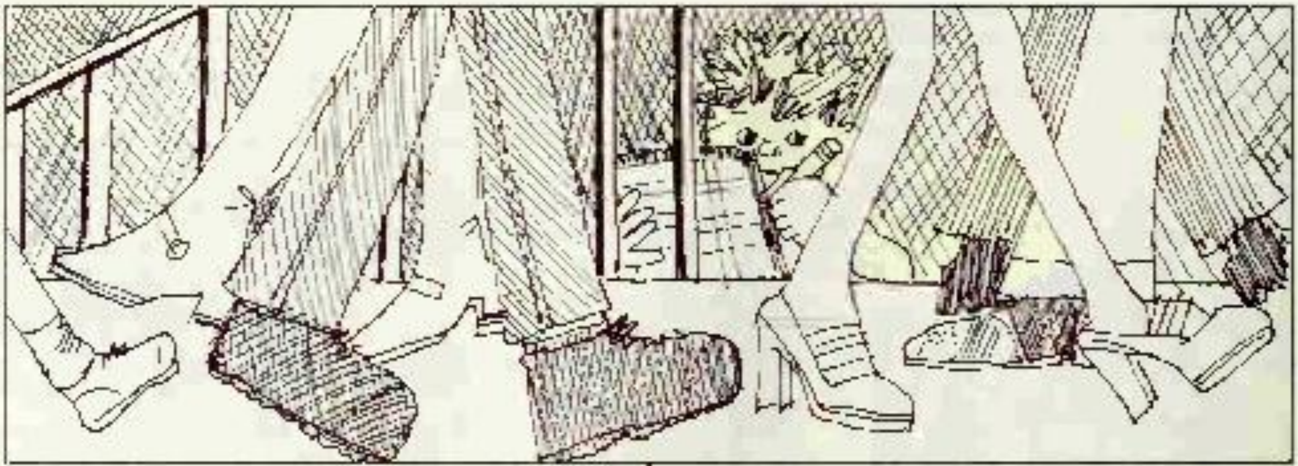
लाहया आवडणारा म्हणतो

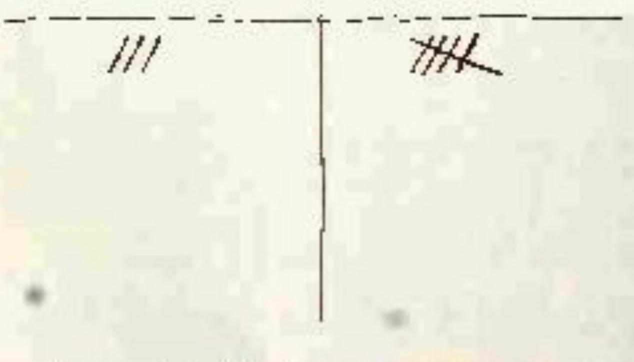
‘पोस्टाच्या पेटीत किती लाहया मावतील?’

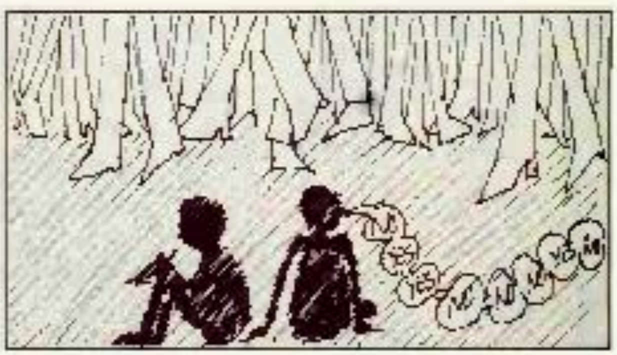


नाहीतर आता जोड्याच्या (बुटाच्या) नाड्या (Lace) विषयी विचार करा. लोक नाडी वाले जोडे जास्त वापरतात की बिन नाडी वाले? आधी गृहीतक ठरवा. चक्क एका ठिकाणी ठिय्या मारा आणि येणाऱ्या जणाऱ्याचे जोडे बघत तक्ता दाखवतो तशी नोंद करा.
जर खूप गर्दीचे ठिकाण असेल तर एखाद्या मैत्रिणीची अगर मित्राची मदत घ्या.

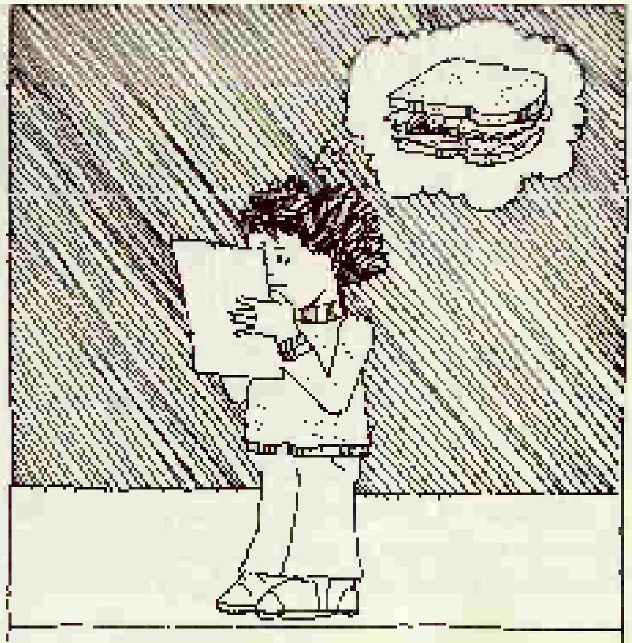




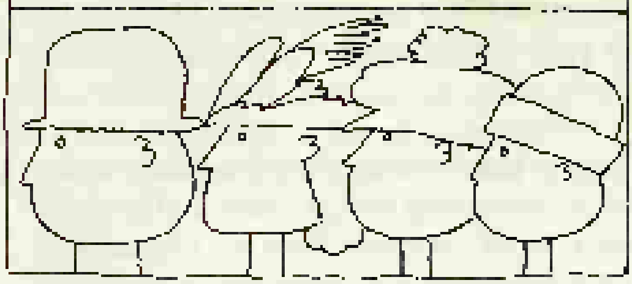


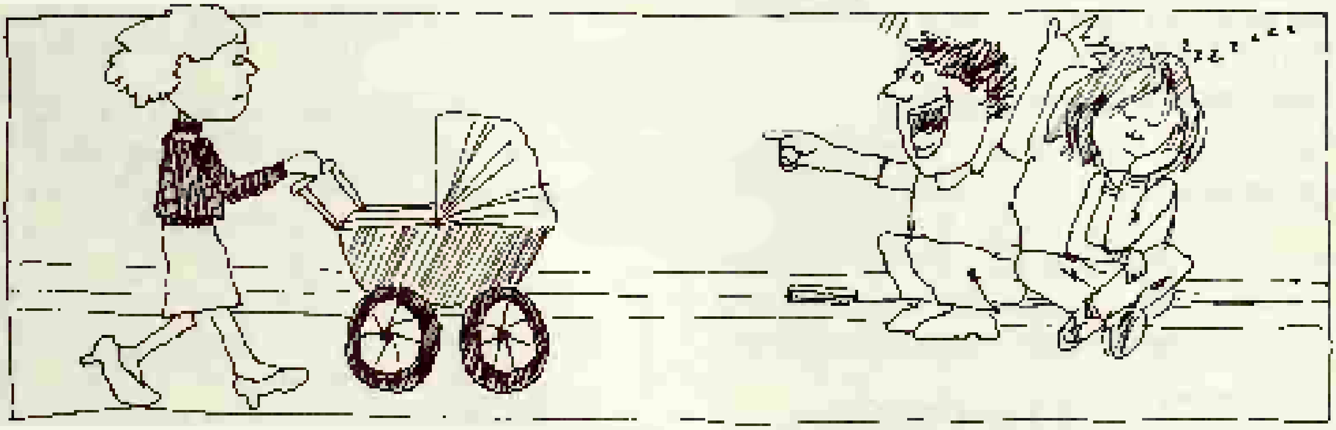


काम चालू ठेवा. जेवढा मोठा नमूना तेवढा प्रयोग जास्त अचूक आणि यशस्वी. कंटाळा येईपर्यंत किंवा अंधार होईपर्यंत (किंवा भूक लगेपर्यंत) काम चालू ठेवा. तुमचे गृहीतक बरोबर होते की चूक? जर प्रयोग फक्त पुरुषां पूरता मर्यादित ठेवला तर? अगर स्त्रियांसाठीच ठेवला तर?



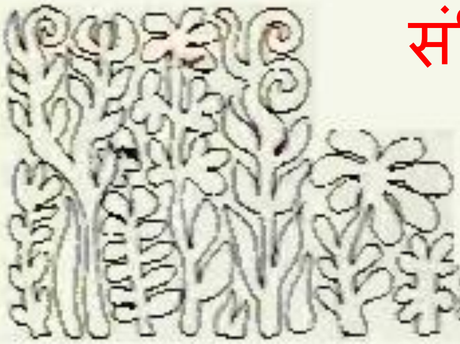
अंदाज करा: किती माणसे भेटल्यावर एक लाल स्वेटर घातलेली बाई बाबा गाडी ढकलीत जाताना भेटेल?





जर कुणी म्हटले, ‘अरे काय चाललंय? पैसे गटारात पडले का?’ तर म्हणा, ‘मी एक गणिती नमूना घेत आहे की लोक किती टक्के जोडे नाडीचे वापरतात.’

किंवा म्हणा, ‘मी आकडेवारी तपासत आहे.’ किंवा म्हणा ‘आज या रस्त्यावर फक्त 43 टक्के माणसे नाडी वाले जोडे वापरत होते.’



संस्थिति (Topology) बाग



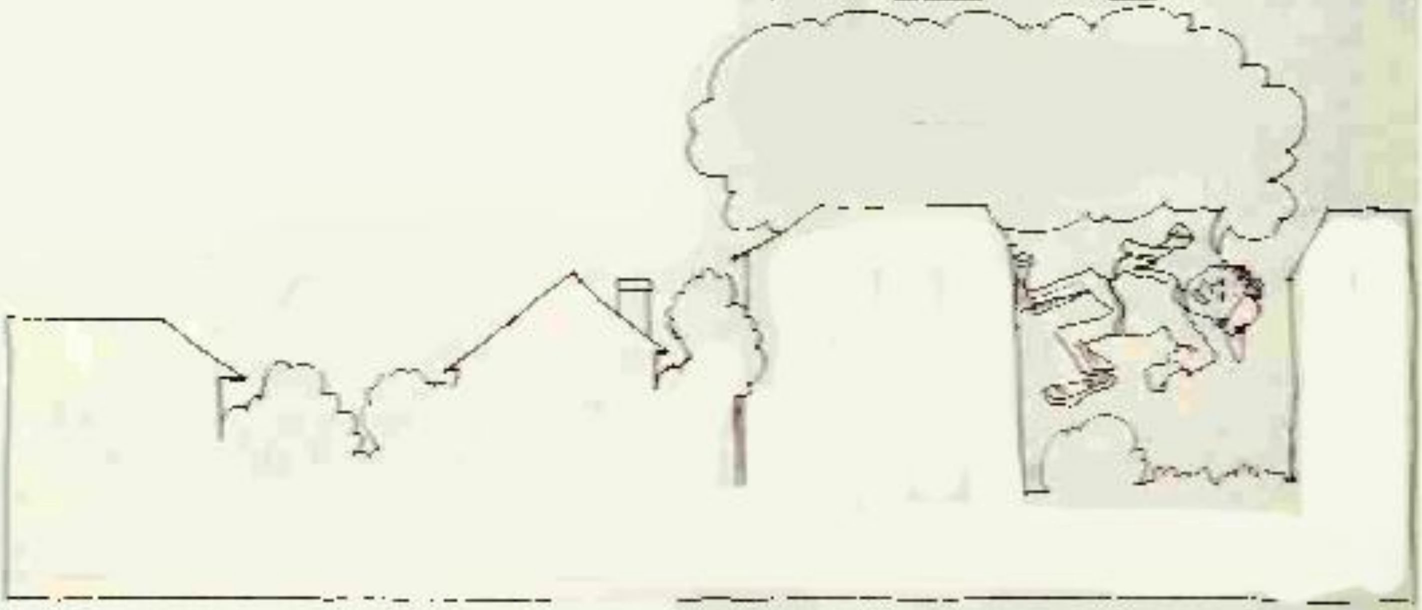
संस्थिति (Topology) बाग म्हणजे

फुलझाडांची बाग नाही.

तर Topology म्हणजे बिंदु, रेषा,

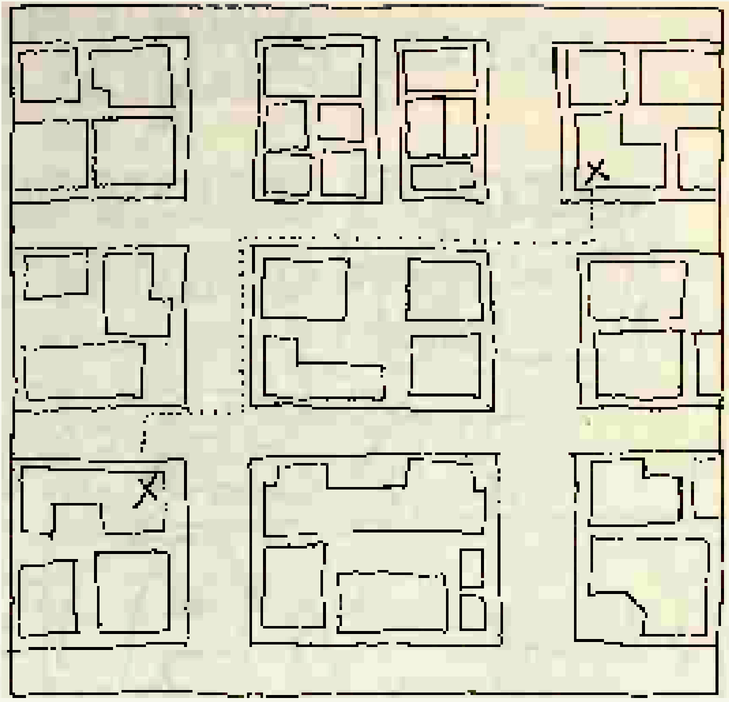
पृष्ठभाग, वगैरेचा अभ्यास.







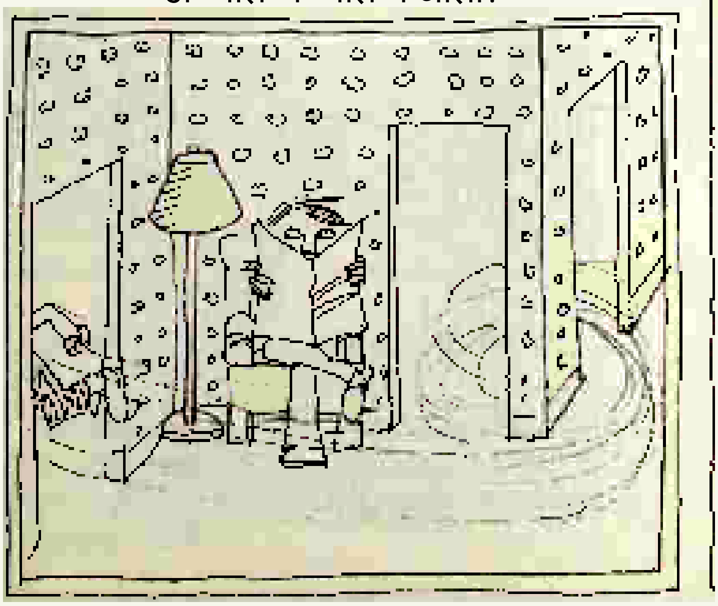
एखादा गणिती म्हणणार, “मला येथून घरी जाण्यासाठी तीन रस्ते ओलांडावे लागतात. पण एकच रस्ता पुनः न ओलंडता हे चार किंवा पाच रस्ते ओलांडूनही करता येईल का?”. किंवा, “नेमके तीन कोपरे (corners) वापरुन घरी पोंचण्याचे किती मार्ग असतील?” मला तर वाटते हा वेडपटपणाच आहे. ही गणिती मंडळी आणखी काय काय विचार करीत असतील ते सांगता येत नाही.



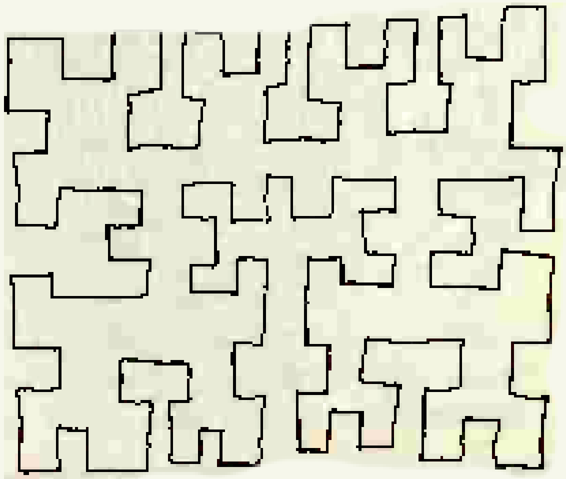


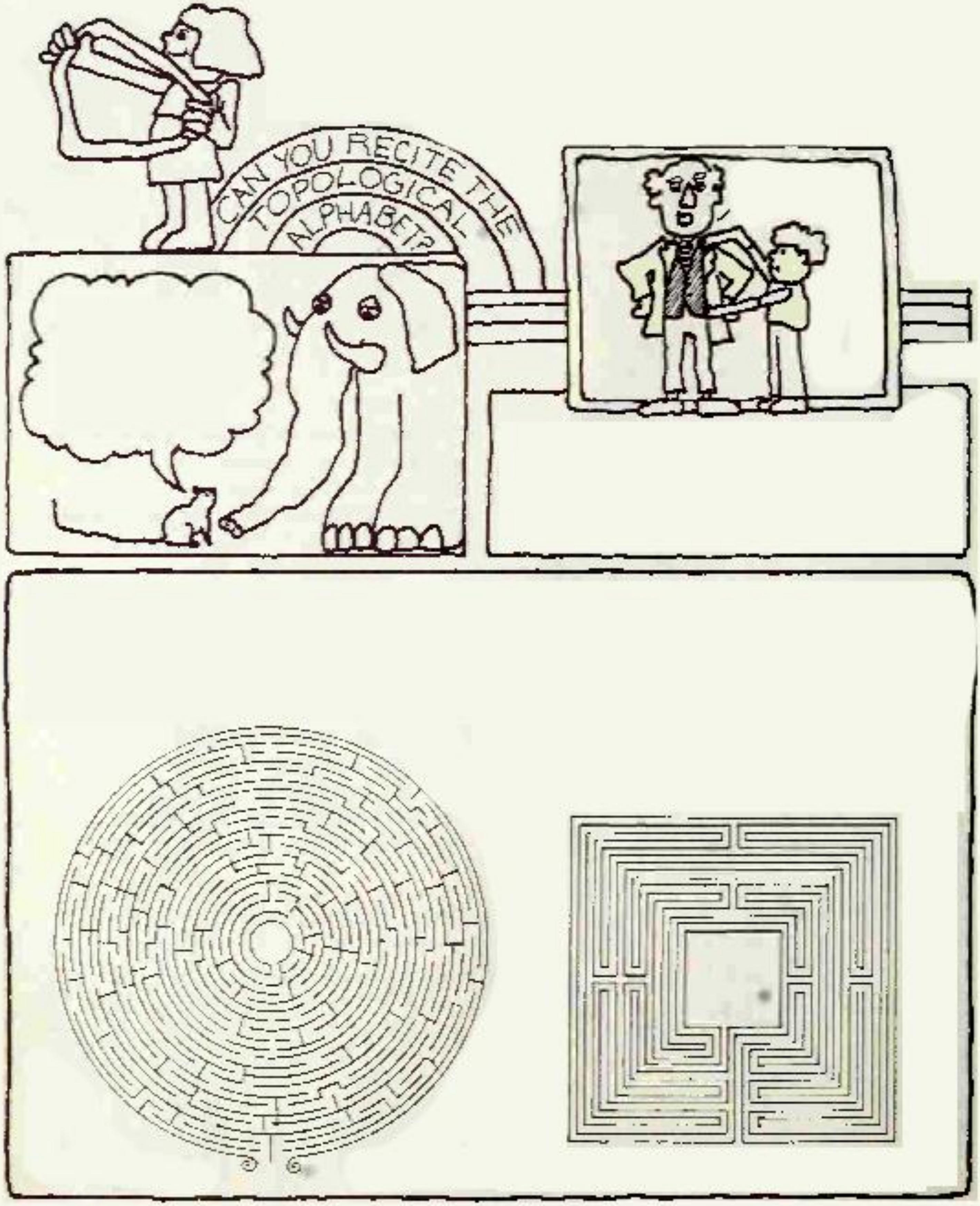
आता तुम्हीच करून बघा. सोबतच्या चित्रात एक मार्ग ठरवा. तो वापरताना किती रस्ते लागतील ते पहा. याहून कमी रस्ते घेता येतील का? किंवा दुप्पट रस्ते घेता येतील का ते पहा. तोचतो रस्ता पुनः नाही घ्यायचा. जर कुणी विचारले की काय करतोस, तर म्हणा, ‘मी एक टोपॉलॉजी चा अभ्यासक आहे आणि मी एक जोडणी (नेटवर्क) सिद्धांत तपासून पाहतोय. ताठ मानेने चाला झपझप चाला.

तुमच्या घरातला प्रत्येक दरवाजा एकदाच वापरुन आणि एकच दरवाजा दोनदा न ओलंडता तुम्ही घराचे सर्व दरवाजे ओलांडू शकाल? आणि असे करताना कुणाच्या अध्यात-मध्यात न जाता?



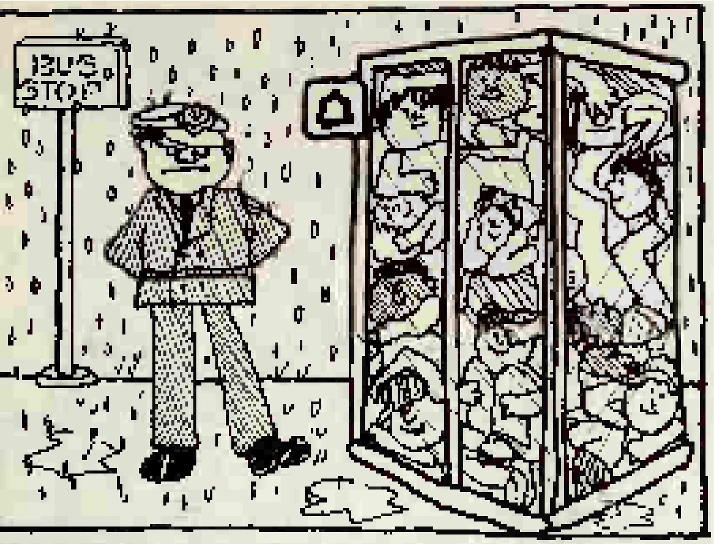
आता हे चित्र पहा आणि मध्ये कुठेही पेन्सिलीचे टोक ठेवा. तो बिंदु ‘आत’ आहे की ‘बाहेर’?. संस्थिति शास्त्र वापरणारे त्या बिंदुपासून बाहेर पर्यन्त एक रेषा काढतील.
जर ती विषम वेळ चित्राच्या रेघाशी भेटली तर तो बिंदु आत, सम वेळ भेटला तर बाहेर. असे का असेल?



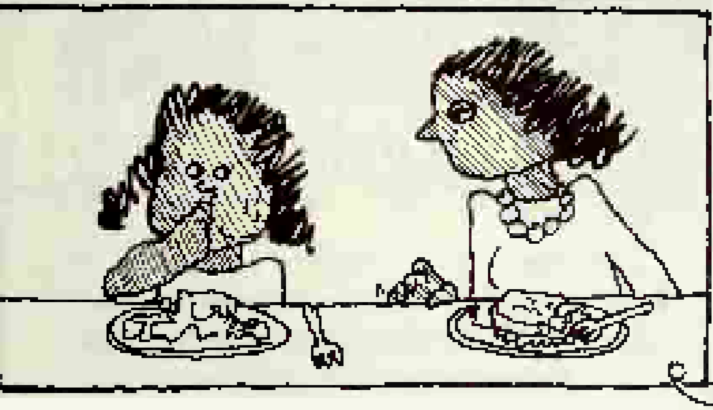

CAN YOU RECITE THE TOPOLOGICAL ALPHABET?

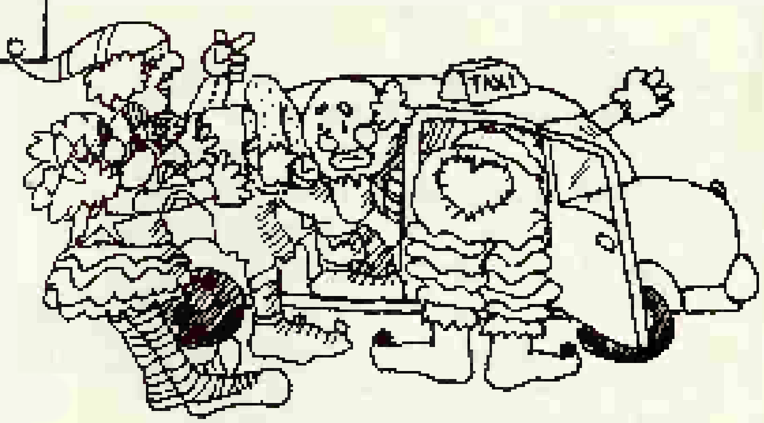
फोनच्या गाळया (Booth) मध्ये कोंबलेली मुले.

(बसची वाट पहात आणि पावसात न भिजता)

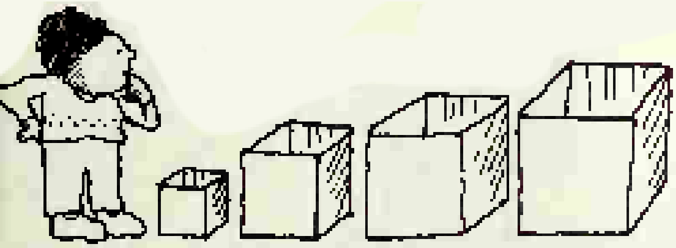


फोन-गाळया मध्ये करण्याच्या गोष्टी.
जुन्या काळी लोक फोन-गाळयात जमून आपले फोटो काढून घ्यायचे. (तशा त्या बावळटच प्रथा होत्या म्हणा) असो. आता विचार करा. अंदाजे किती मुले एका फोन गाळयात मावतील?
जर हे अडचणीचे वाटत असेल तर दूसरा विचार करा. कधी जेवणात फ्रूट सॅलड असेल तर एका घासात तुम्ही किती द्राक्षे तोंडात साठवू शकाल?





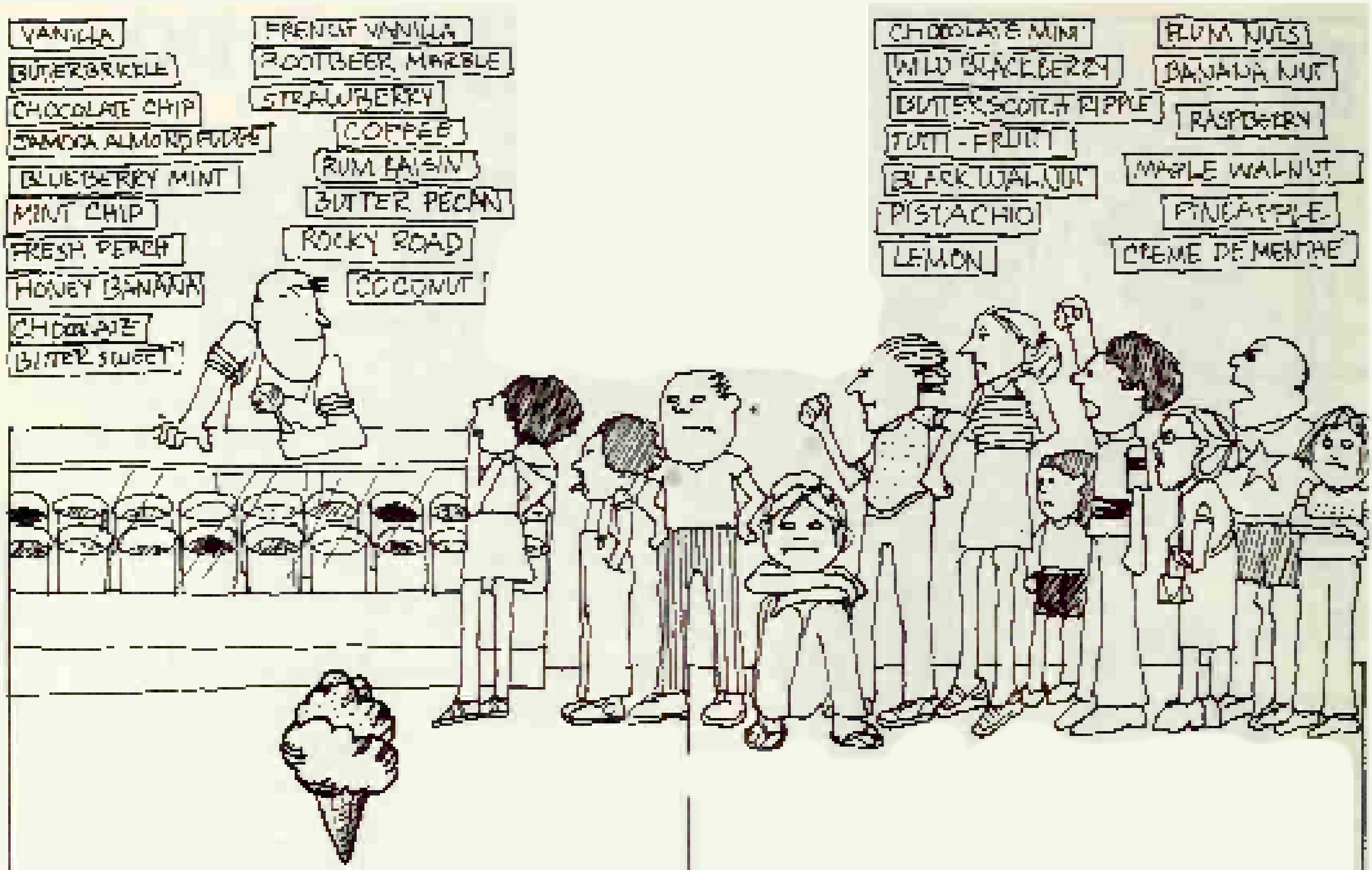
किंवा किती विदूषक एका मोटार गाडीत मावतील? असाही विचार करून पहा:
छोट्यात छोटा असा किती लांबीचा घन ठोकळा असेल ज्यात तुम्ही पूर्ण स्वतःला कोंबुन घेऊ शकाल ?
50 सेमि, 75 सेमि, 100 सेमि?



हे सारे घन फळाविषयीचे प्रश्न आहेत.
एखादा पदार्थ किती जागा व्यापतो या बद्दल.

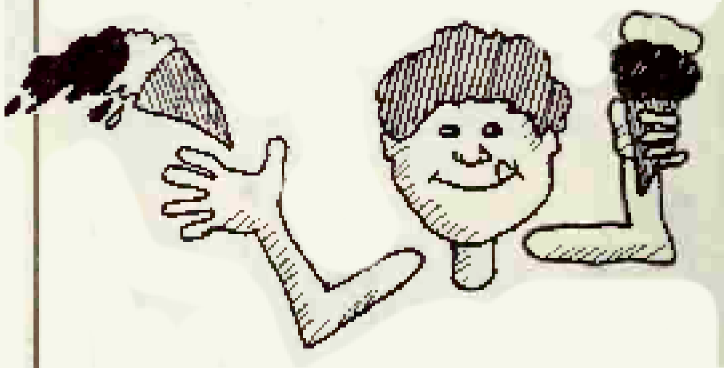


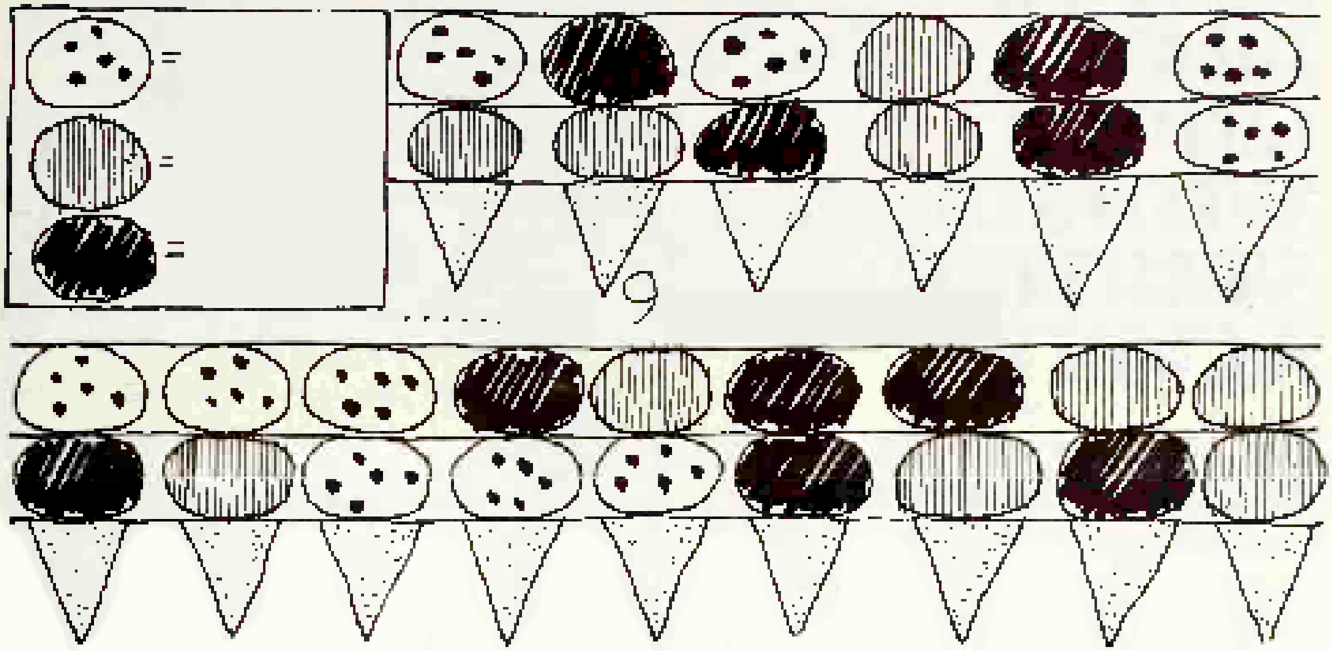
आता थोडासा वेगळा विचार करा.
एका फोनबुकात किती नावे मावतील? एक हजार? एक लाख? एक कोटी? सर्व नावे मोजावी लागतील की काही युक्ती वापरुन काम वाचवता येईल?



गणिती माणसे इतरांप्रमाणे आइसक्रीम खातात आणि दुहेरी शंकू (Double Cone) हा अनेकांच्या आवडीचा असतो. समजा 31 पैकी 3 प्रकारचे (उदा. मनुका, पिस्ता, आणि चॉकलेट) आइसक्रीम घेतले आणि त्यांचे वेगवेगळे दुहेरी शंकू बनवायचे ठरविले तर किती वेगवेगळे शंकू बनतील? या साठी जे गणित लागते त्याला अभिनिवड (Permutation) आणि समनिवड (Combination) म्हणतात. पुढील चित्रात दाखविलीप्रमाणे एकूण सहा समनिवड आणि नऊ अभिनिवड तयार होतील.

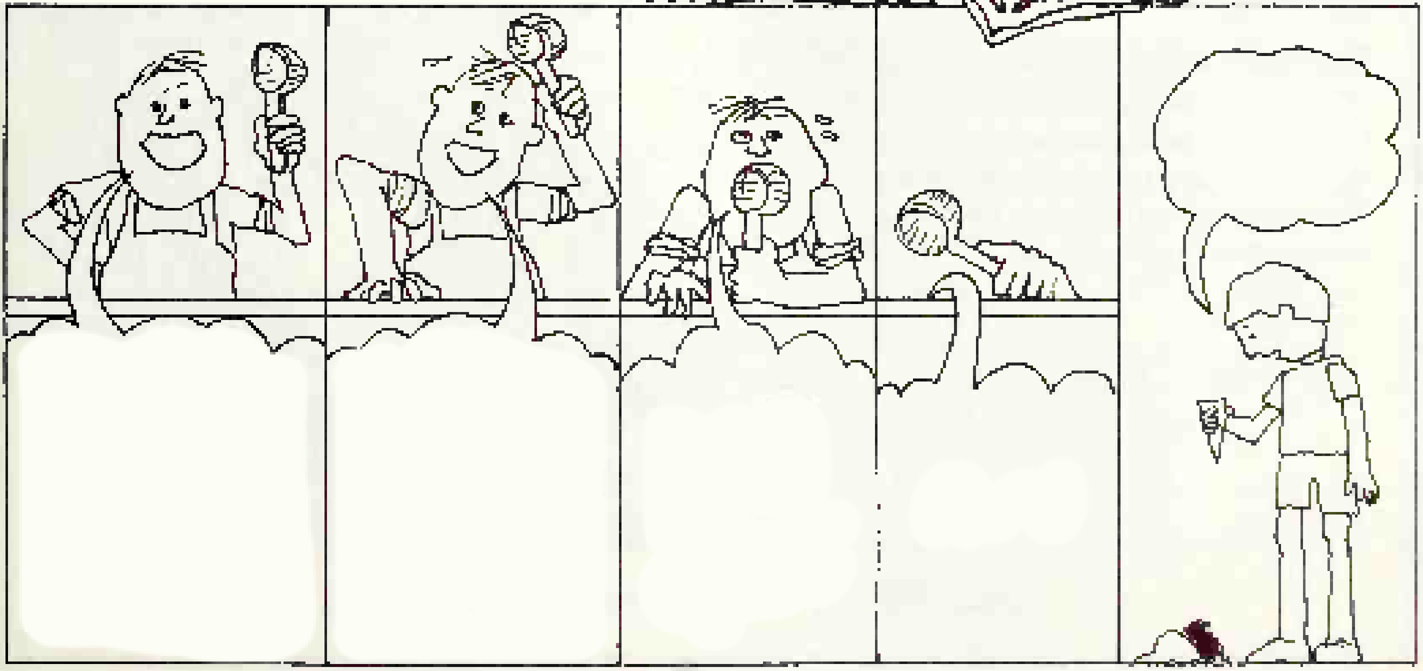






आता थोडे गणिती संशोधन करा. जवळच्या आइसक्रीम दुकानात जाऊन किती वेगवेगळे प्रकार आहेत ते पहा. एकूण किती दुहेरी शंकू होतात त्याचे गणित करा. मग दुकानदाराला विचारा ‘जर मी सांगितले एवढे शंकू बरोबर असले तर मला एक शंकू फुकट देशील का?’. जर तो म्हणाला ‘शहाणपण पुरे’ तर हाच प्रयोग एका मित्रावर किंवा मोठ्या भवावर करून पहा.

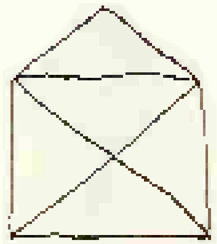




भांडण न करता गर्दी कशी जमवाल ?

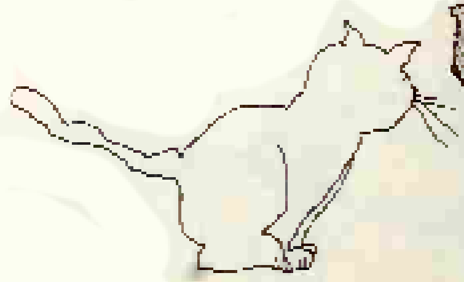
(एखाद्या भानगडीत अडकणे)

या चित्रात कुठेही पेन्सिल ठेवा आणि संबंध चित्रावरून गिरवा. पण गिरवताना पेन्सिल दोन वेळा कोणत्याही रेषेवर पुनः जाणार नाही याची काळजी घ्या.

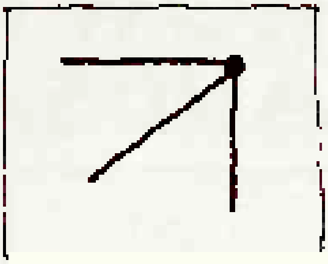


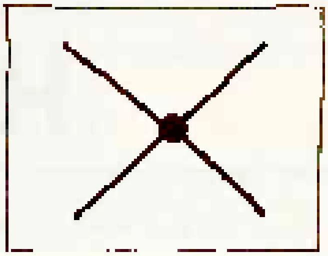
जमते का पहा. हवे तर एखाद्या मित्राला करायला सांगा. आता एक मिल्क शेक सारखा खाद्य पदार्थ घेऊन पटांगणात या. एक पैज लावा: जो कोणी अधिक चित्रे अशी काढेल ज्यात संबंध आकृतीवरुन पेन्सिल फिरवताना कोणत्याही रेषेवर पुनः जावे लागणार नाही तो जिंकेल एक मिल्क शेक आणि इतराना खडुकाम पुसायला लावा.

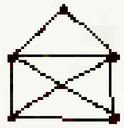
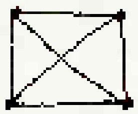
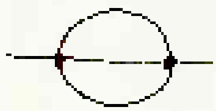


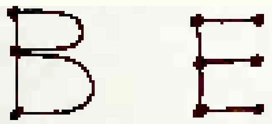


हा पेन्सिल-चित्र खेळ संस्थिति विज्ञानात आहे (लक्षात आहे न संस्थिति विज्ञान?). तुम्ही फक्त चित्राकडे पाहून सांगू शकता की हे एकरेशीय आहे की नाही. म्हणजे पेन्सिल न उचलता आणि एकच रेषेवर दुसऱ्यांदा न जाता पूर्ण चित्र काढता येईल की नाही. प्रत्येक कोपऱ्यांत (corner) किती रेषा मिळतात ते पहा. त्यातल्या किती कोपऱ्यात विषम रेषा मिळतात ते ठरवा. आता topology समजणाऱ्याला एवढयावरून सांगता येते की संबंध चित्र एक रेषेय आहे की नाही. कळली का गंमत? नाही तर काही चित्रे काढून पहा.





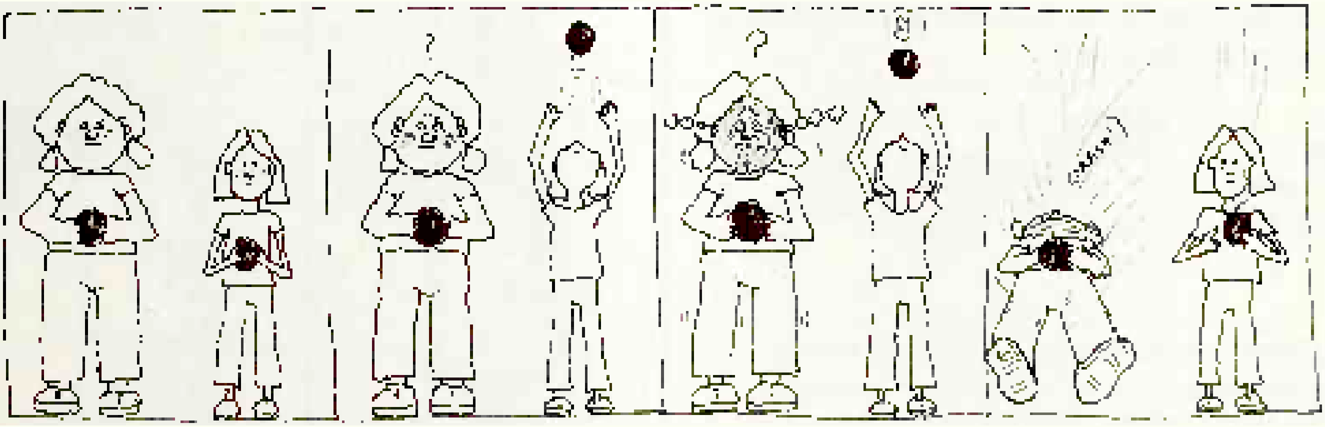
	2	YES
	4	NO
	0	YES



रबरी चेंडूचे कोडे

(किंवा तार्किक विचार करण्याची सवय)

हे कोडे सोडविण्यासाठी अंगणात भरपूर जागा हवी. आणि एक टेनिस बॉल. एखादा मठ्ठ मुलगा सोबतीला असला तर बरेच. बॉल खूप शक्ति लावून उंच फेकायचा आणि जमिनीला अगर भिंतीला न लागता कसा थांबू शकेल?

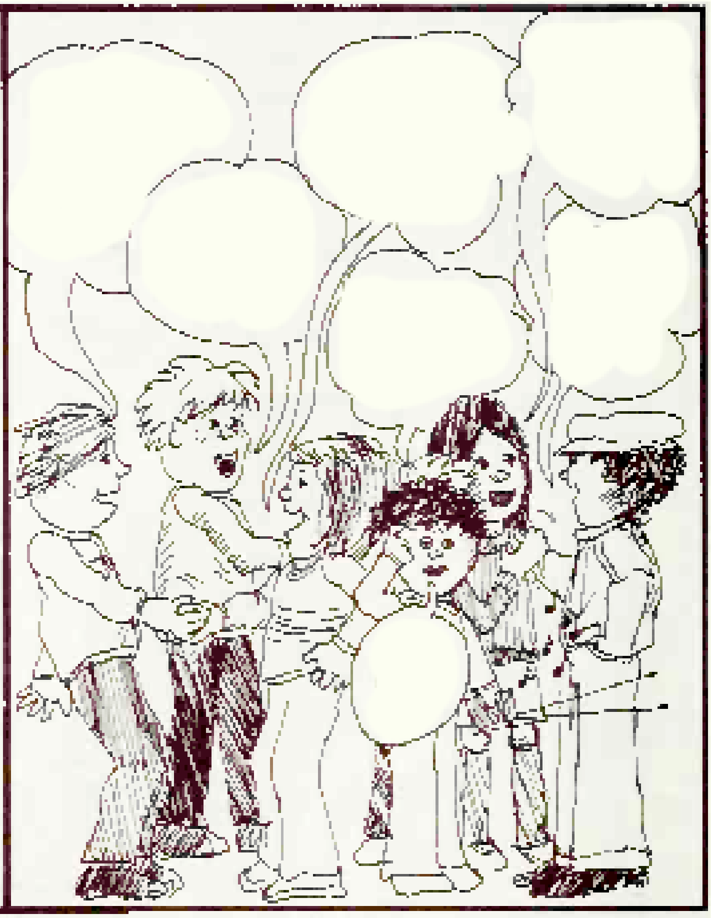


तात्पर्य: जे अधिक मोठे ते जास्त दणकून पडणार.

किती हस्तांदोलने ?

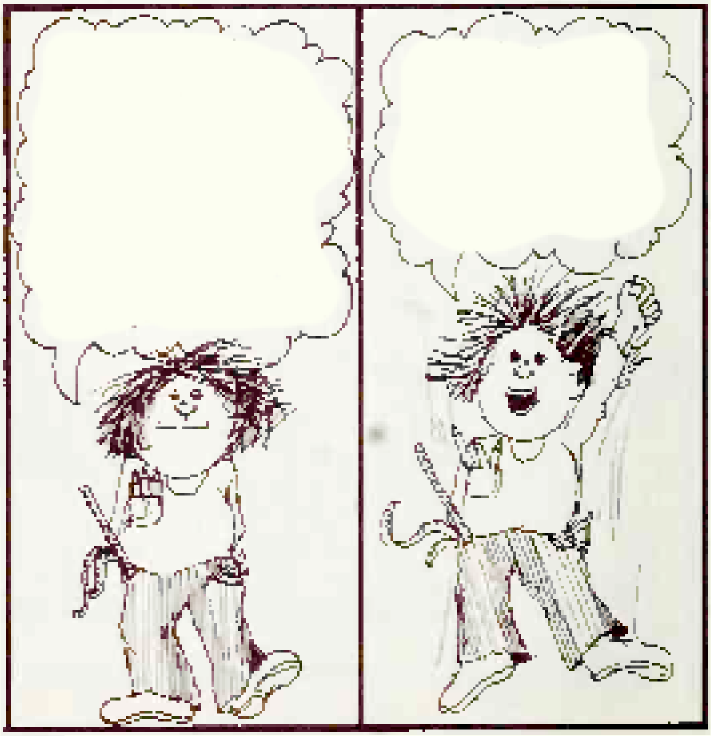
समजा तुम्ही चौकात सहा मित्रांना भेटलात. तर एकूण किती हस्तांदोलने होतील? शून्य? कारण मुले मुली हस्तांदोलन करत नाहीतच मुळी. ती एक मागास पद्धत आहे. पण समजा तुम्ही करता.





प्रत्येकाने प्रत्येकाशी हस्तांदोलन करायचे ठरविले तर किती होतील?
हस्तांदोलनाचे सुद्धा एक गणित आहे..





एकदा चौकात बस ची वाट पहात असाल आणि दूसरा काही खेळ सुचत नसेल तर हस्तांदोलनाचा खेळ करून पहा. आणि चित्रात आहे तसा पुढील तक्ता बनवा

मोठी माणसे वाटतात तेवढी शहणी नसावीत

तुम्ही जर या पुस्तकातून इतर काही शिकला नसाल तरी चालेल.

फक्त एवढे लक्षात ठेवा की मोठी माणसे तुम्हाला वाटतात

तेवढी शहणी नसतात, विशेषतः गणिताच्या बाबतीत.

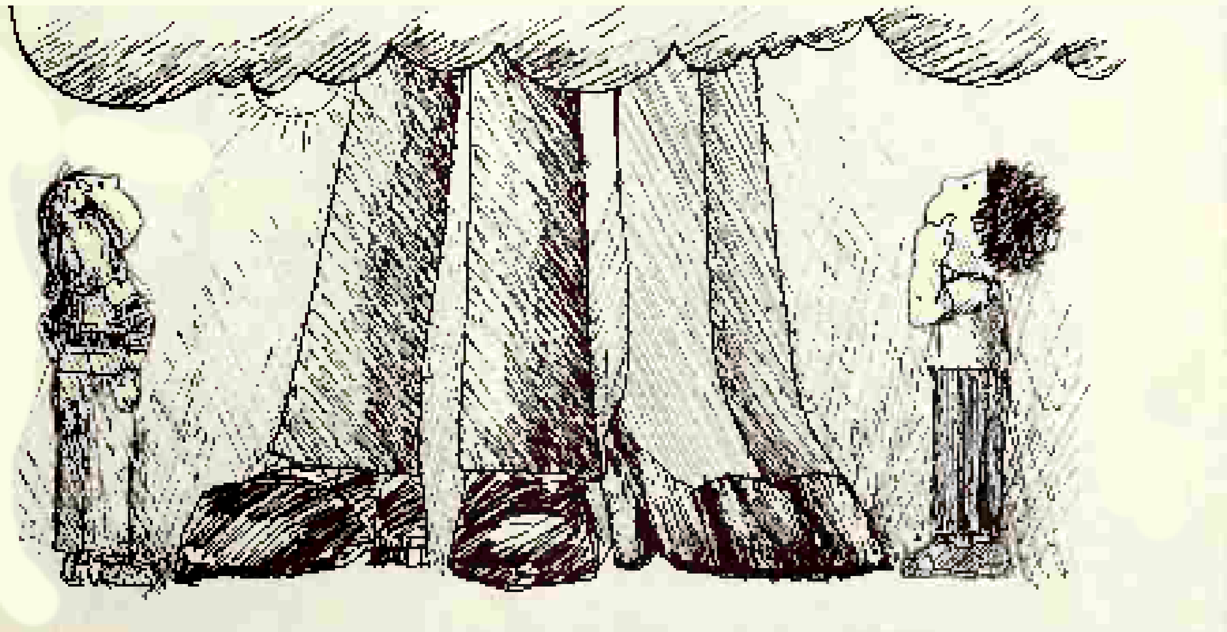
काही कल्पना सुचतायत.

मोठी माणसे धड ऐकत नाहीत आणि उलट

तुम्हालाच भासवतात की तुम्ही मूर्ख आहात.

कदाचित या कल्पना मोठ्या माणसांस काही शिकवतील सुद्धा.

सध्या तुम्ही शिक्षक.

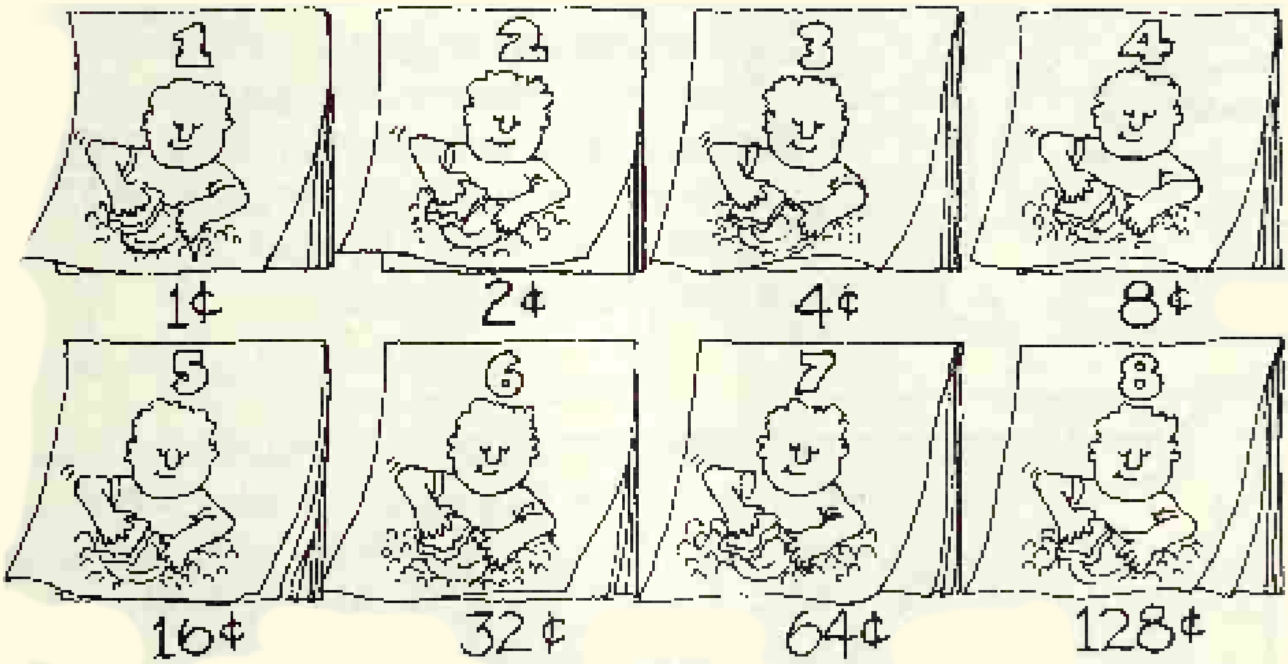


भांडी घासणे-विसळणे



तीस दिवसात श्रीमंत बनण्याची युक्ति:

आई बाबांना म्हणा, “मी रोज भांडी घासणे विसळणे करीन. मला या कामासाठी पहिल्या दिवशी एक पैसा द्या. आणि प्रत्येक दिवशी आदल्या दिवसाच्या दुप्पट पैसे द्या.”

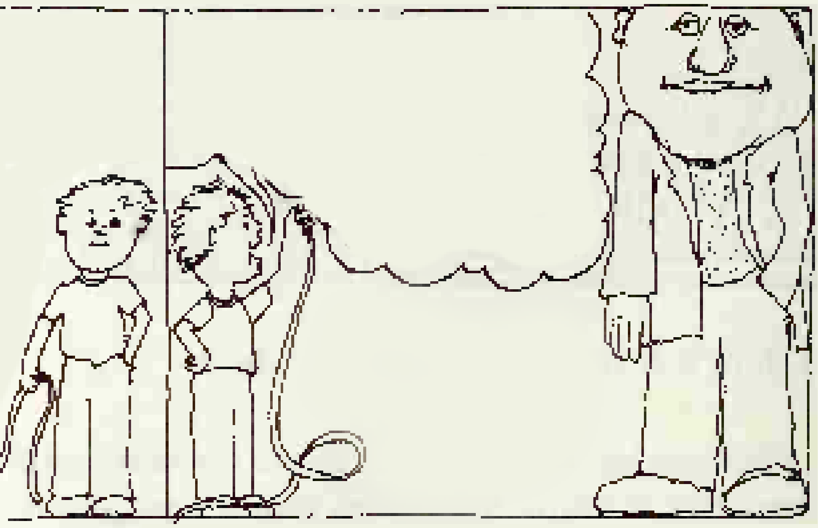


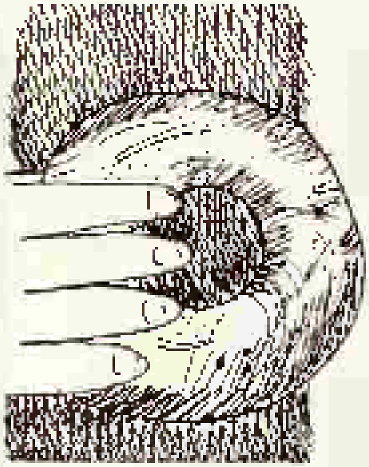
कशी वाटली कल्पना? अफाटच ना? फार दिवस थांबावे लागणार नाही. आठ दहा दिवसात म्हणतील पुरे हा प्रयोग. कारण गणिती भाषेत याला म्हणतात घातीय वाढ (Exponential Growth).

लक्षात असू द्या. पुढच्या वेळी तुम्ही बोलाल ते नीट लक्ष देऊन ऐकले जाईल. कारण घातीय वाढीने एक महिन्यात तुम्ही स्वतःचा dDshwasher घेऊ शकाल आणि सर्वांना घेऊन सहलीला पण जाऊ शकाल.

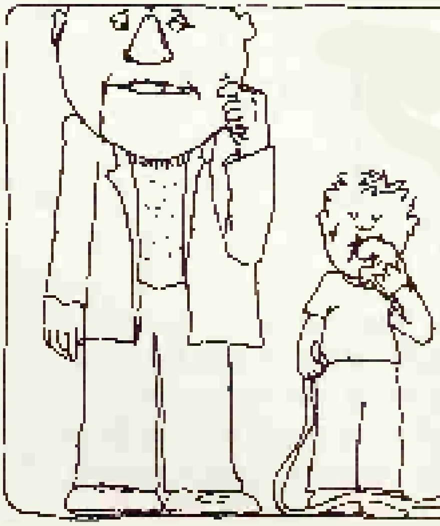
मोठे डोके

आधी एक दोन मिटर लांबीची दोरी घ्या. मग एक मोठे माणूस घ्या आणि विचारा, “तुमच्या डोक्याभोवती ही दोरी किती वेळा गुंडाळल्यावर तुमच्या ऊंची एवढी भरेल?”



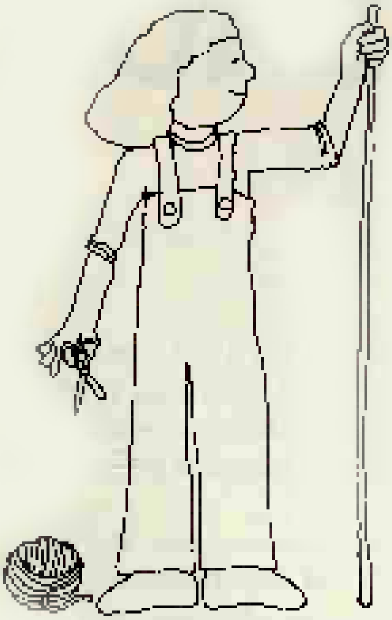


कदाचित हा प्रश्न तुम्हाला दोनतीन वेळा विचारावा लागेल. हरकत नाही. शांतपणे विचारीत रहा. मी पैजेवर म्हणेन की तो हरेल. तुम्ही म्हणाल याचा गाणिताशी काय संबंध?



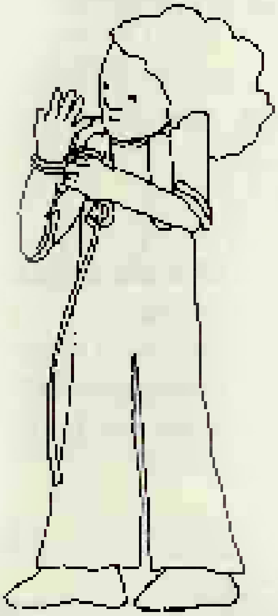
तर याला गणितात म्हणतात गुणोत्तर. एका वस्तूच्या वेगवेगळ्या भागांचा यात विचार करता येतो. तुमचे डोके आणि ऊंची यांचे गुणोत्तर आणि मोठ्या माणसाचे डोके आणि ऊंची यांचे गुणोत्तर सारखेच असेल काय? दोन वस्तूंच्या लांबीचे गुणोत्तर आपण नेहमी करतो. पण वर्तुळीय लांबी आणि रेशीय लंबी यांचे गुणोत्तर सहसा कुणी पहात नाही. तेंव्हा मोठ्यांना फार दोष देऊ नका.

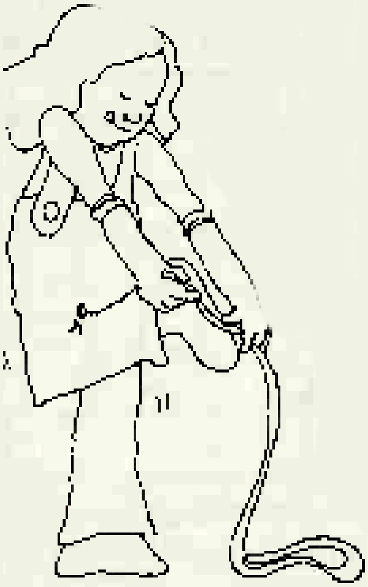
आणखी शरीर विषयक गणित



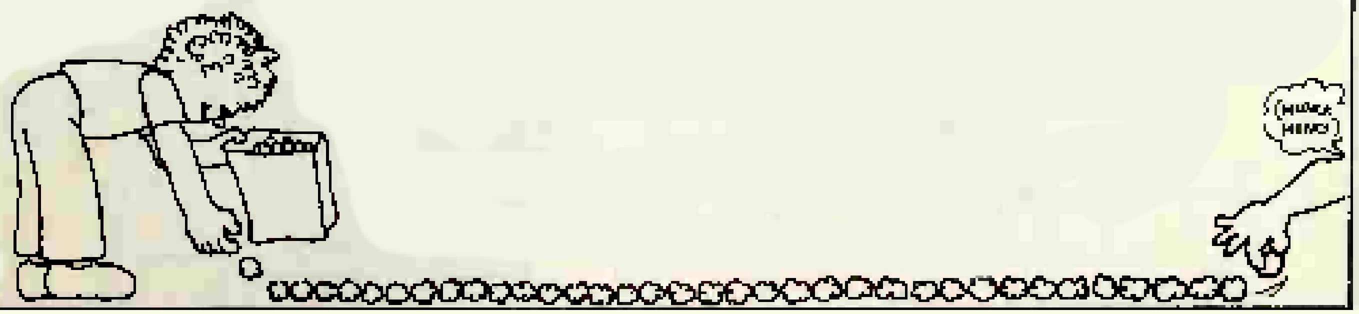


तुमच्या ऊंचीएवढी दोरी
कापून घ्या. आता तुम्ही
दोन्ही बहू लांब करून बघा की
तुमचा चौरस बनतो की
काटकोन चौकोन.



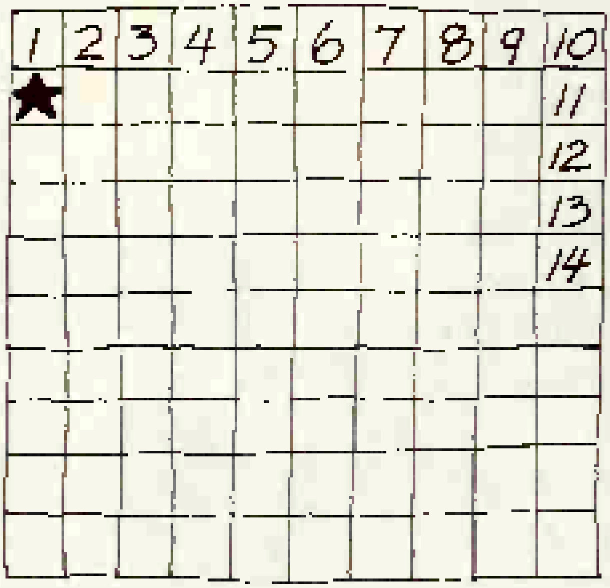


याच दोरीने आणखी काही
उत्तरे काढा. मनगटाभोवती
दोनदा आणि गळ्याभोवती
एकदा यांची लांबी तेवढीच
भरते काय? तळपाय आणि
मनगट यांची लंबी सारखीच
आहे काय?



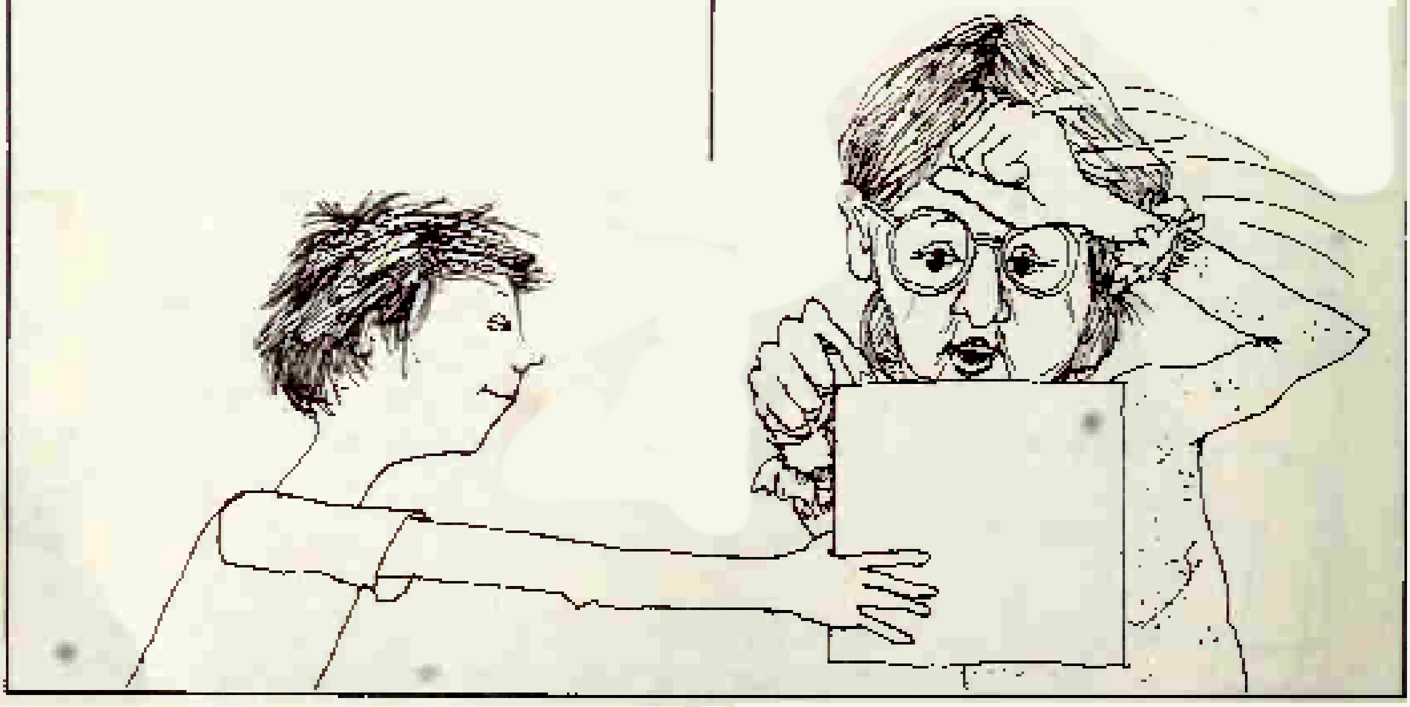
डोकेफोड

उभ्या आणि आडव्या रेषांचा एक दहा x दहा असा चौरस काढा. पहिल्या दहा रांगात एक ते दहा अंक लिहा. दहाच्या खाली 11, 12, इ. लिहा.

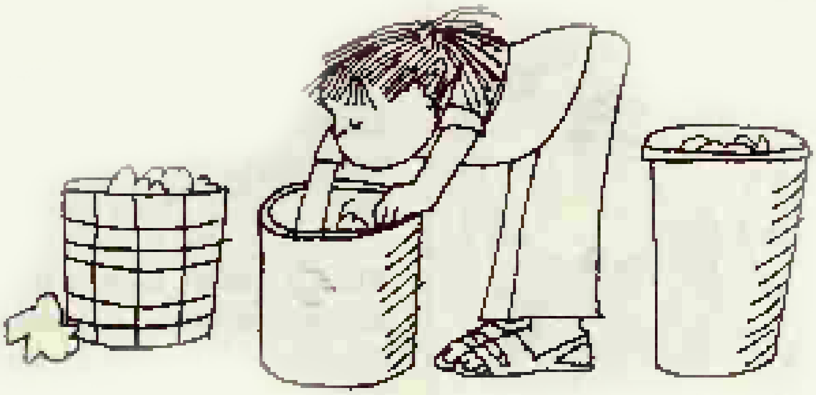


आता विचारा की एकच्या खाली कोणती संख्या असेल? बहुतेक मंडळी उत्तर देणार नाहीत. तुम्ही उत्तर 36 संगीतलेकी कपाळच बडवून घेतील. मग आणखी एक संधि द्या. म्हणा “50 कुठे बसेल?“ 50 जिथे असेल तोपर्यन्त अर्धा तक्ता भरेल काय? 100 कुठे असणार?”

(चेहऱ्यावर अनुदारपणाचा भाव आणू नका. या पुस्तकाशिवाय तुम्हालाही हे जमले नसते.)



अधिक गुणोत्तरे



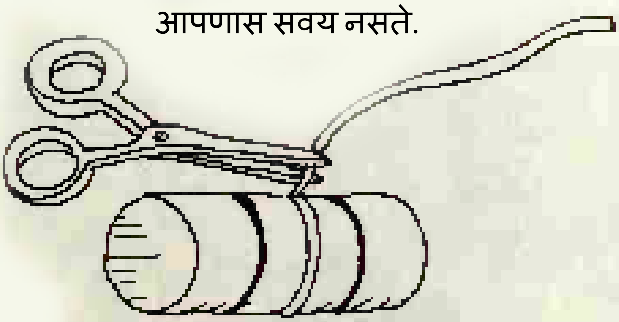
तुम्हाला कचरा पेटीत एखादा टॉयलेट कागद गुंडाळलेला दंडगोलकार कपटा मिळेल.



त्यावर चित्रातल्या प्रमाणे वर्तुळे काढा. एक अंदाजे 30 से. मी. दोरी घ्या.



ती दंडगोलाच्या परिघाएवढी तोडून घ्या. आता अंदाज करा की जर ती एका टोकापासून सरळ नेली तर कोणत्या वर्तुळापर्यंत पोचेल? चुकले ना? आश्चर्य वाटले? वर्तुळाकृती लांबी मोजण्याची आपणास सवय नसते.



आपण कापलेली दोरी व्यासाच्या सुमारे तिप्पट असते. हे लक्षात आल्यावर दोरीच्या लांबीची कल्पना येते?

आणखी इतर वस्तूंच्या लांबीचाही असाच अंदाज करा. आता तुम्ही अधिक निपुण झाला असाल. पैजेवर म्हणता येईल की मोठी माणसे तुमच्याहून फार शहाणी नसतात.



पुढे काय?

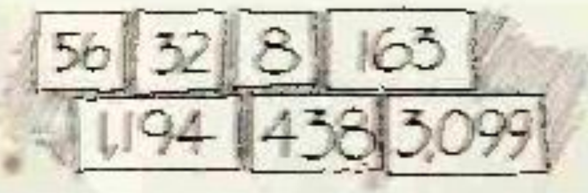
एकाद्या मोठ्या माणसास गळी पाडा.



कागद पेन्सिल तयार असू द्या. म्हणा, फार काही नाही. फक्त सात आकडे लिहायचे. बेरीज, वजाबाकी, गुणाकार वगैरे काही नाही. तसले काहीच नाही.



तुम्ही एक संख्या तोंडी सांगायची आणि दुसऱ्याने त्या संखेच्या पुढची संख्या लिहायची. समजा तुम्ही 14 म्हटले की त्याने 15 लिहायचे



आता तुम्ही सावकाश म्हणायचे 56, 32, 8, 163, 1194, 438 आणि 3099. आता फक्त मोठ्या माणसाने शेवटची संख्या काय लिहिली ते वाचा. जर त्याची संख्या 4000 असेल तर त्याला तुमची 3099 ही संख्या वाचून दाखवा. म्हणा, “ही चूक साहजिक आहे”. पण जर संख्या 3100 असेल तर मात्र लक्षात राहू द्या की हा मोठा गणितात निश्चितच मठ्ठ नाही.



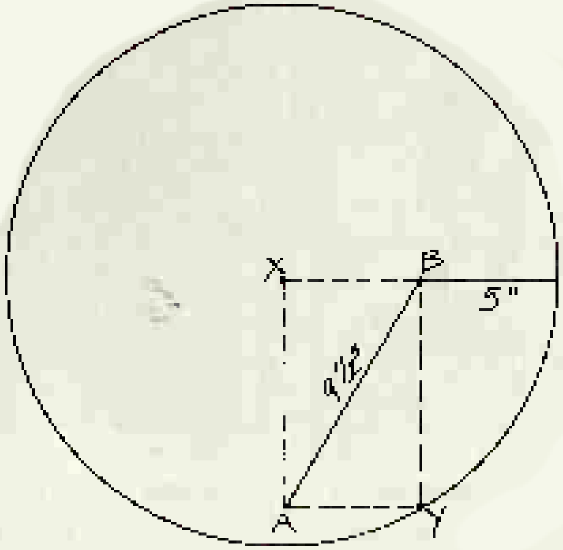
पुनः कधी गृहपाठांसाठी मदत लागलीच तर कुणाकडे जायचे ते लक्षात असू द्या.

स्थान मूल्य हा आपल्या संख्या लेखन पद्धतीचा पाया आहे. त्यात शून्य (0) हा फसवा अंक आहे. कधी याची किंमत काही तर कधी दुसरीच काही. हाच प्रयोग इतरांवर करून पहा. किती टक्के लोक बरोबर उत्तर देतात आणि किती टक्के चूक?

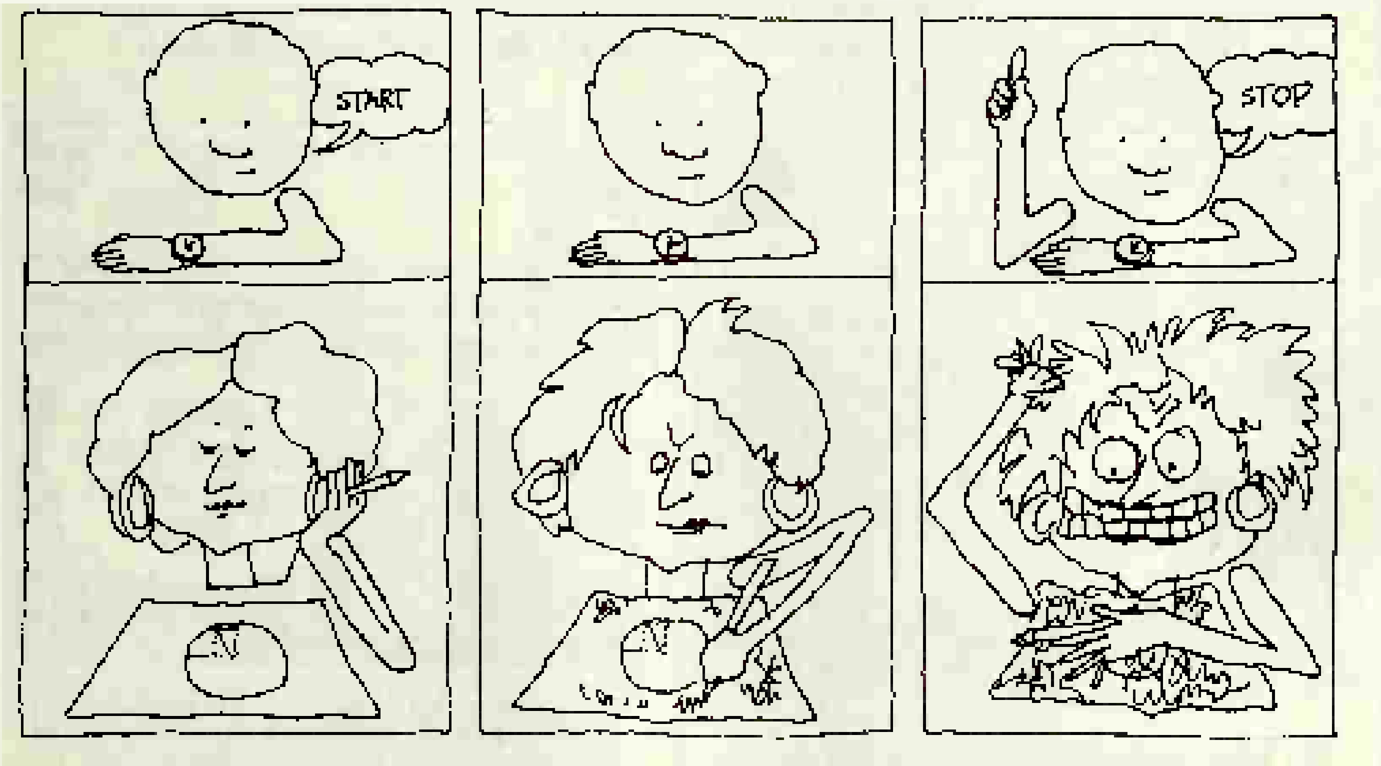


एक मिनिटात तडी पार

आधी हे स्वतःच
करून पहा.
वर्तुळाचा व्यास
किती?
एक मिनिटात
उत्तर काढा.

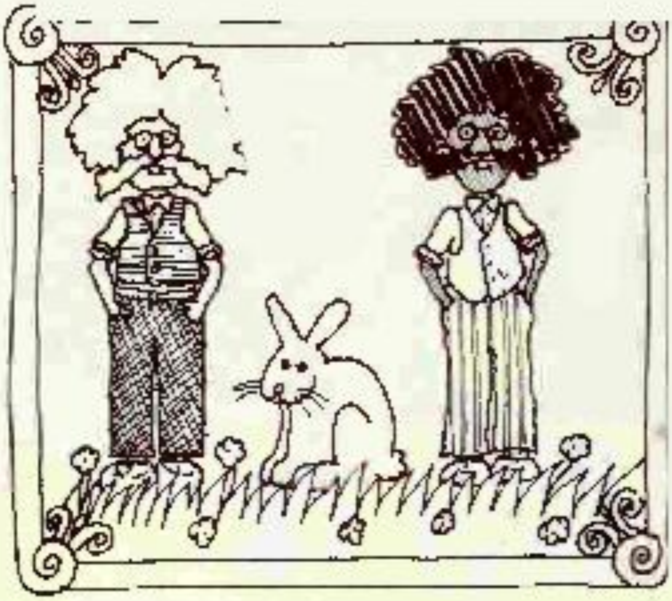


काही विशेष कठीण
गणित करायचे
नाही, काही नाही.
फक्त आकृतीकडे
पहा आणि उत्तर
सांगा.

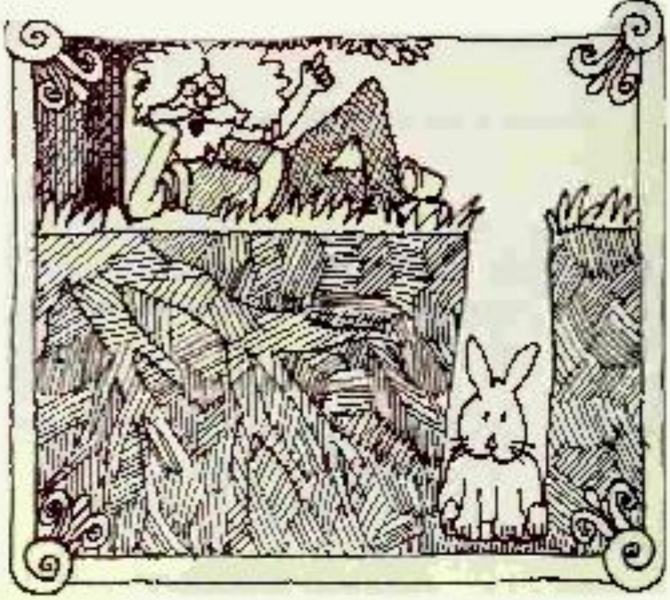


जेंव्हा एखाद्या मोठयास तुम्ही हा प्रश्न विचारल आणि उत्तर मिळत नसेल,
तर म्हणा, 'जर XY ही त्रिज्या असेल तर AB सुद्धा त्रिज्याच असेल ना?
आणि व्यास त्रिज्येच्या दुप्पटच ना?' आणि हसू नका.
तुम्हालाही हे उत्तर आलेच नव्हते ना? (की आले होते?)

ससा आणि गणिताचा जाणकार



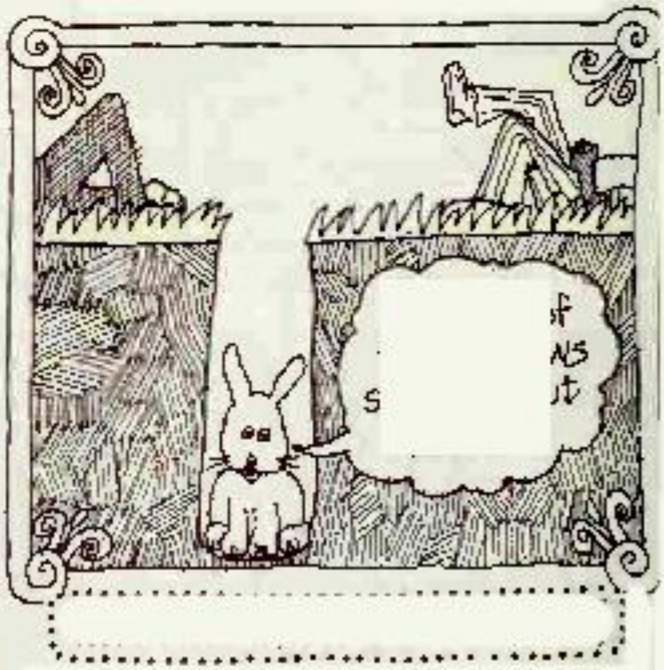
एकदा एक ससा आणि दोन गणिती यांची गाठ पडली. त्या सर्वानाच प्रश्नांची उत्तरे काढण्यात रस होता. ससा एका बिळात अडकला होता. दोघा गणीतज्ञापैकी एक झाडाखाली बसला होता तो म्हणाला



'जर सशाची एक उडी निम्मे अंतर पार करीत असेल तर ससा कधीच बाहेर येऊ शकणार नाही. कारण तो कितीही जवळ आला तरी फक्त उरलेल्याच्या निम्मे अंतरच उंच उडी मारू शकेल'.

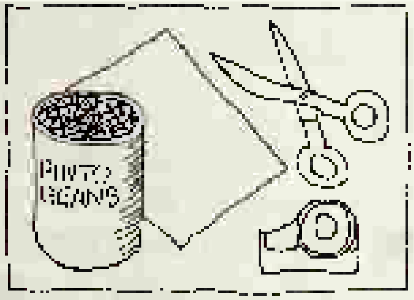


दूसरा गणितज्ञ जमिनीवर पडून पहात होता. तो म्हणाला, 'जरी ससा निम्मे अंतरच पार करीत असेल तर जेंव्हा तो जमिनीच्या खूप जवळ उडी मारेल तेंव्हा तो उडी मारल्यावर जमिनीवर हात ठेवून धडपड करेल आणि बिळातून बाहेर पडू शकेल.'

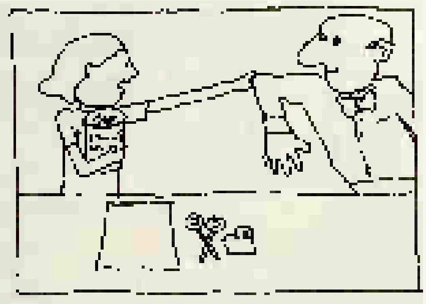


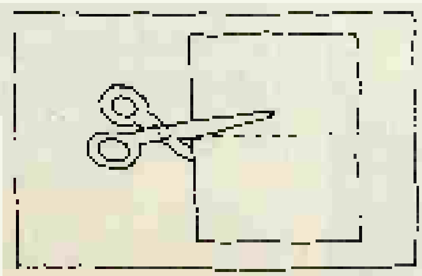
जे गणिती झाडाखाली बसतात, विषयाचे तार्किक विश्लेषण करतात अशांना आपण सैद्धांतिक गणिती म्हणू. त्यांना विश्लेषणपलिकडे इतर गोष्टीत रस नसतो. आणि जे जमिनीवर ओणवे होऊन काम करतात आणि विचार करतात त्यांना आपण व्यावहारिक किंवा उपयोजित (applied) गणीतज्ञ म्हणू. तुम्ही कुठल्या प्रकारचे गणिती होणार आहात?

या प्रयोगासाठी एक जाड पुठयासारखा कपटा हवा, सुमारे 20 x 30 सेमि आकाराचा, शिवाय कात्री आणि चिकट पट्टी हवीच. आणि एक मोठा माणूस ही.

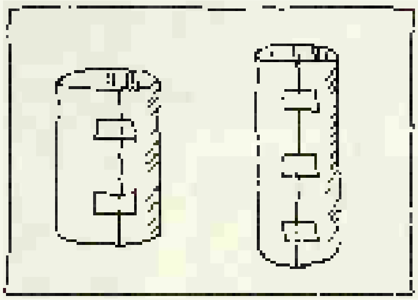


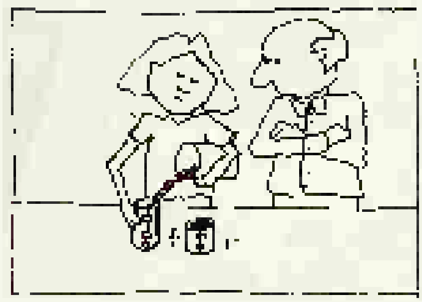
त्याला म्हणा, “मी सध्या घनफळाविषयी विचार करीत आहे. मग तो कपटा सुमारे मध्यावर कापून घ्या. हे दोन समान क्षेत्रफळाचे कागद आहेत.





आता दोन्ही कपट्याच्या गुंडाळ्या करा, एक उभी तर एक आडवी. दोन्ही गुंडाळ्या चिकट पट्टीने दंडगोलाकृती बनवा.
दोन्ही मध्ये सारखेच धान्य मावेल काय? आधी अंदाज करा, मग प्रत्यक्ष करून बघा. क्षेत्रफळ ही द्विमितीय संकल्पना आहे आणि घनफळ त्रिमितीय. यात काही फरक तर आहेच ना?





एक उंच लुकडा मुलगा आणि लठ्ठ बुटका मुलगा सारखेच जेवण खाऊंन पोटात ठेवू शकतील काय?



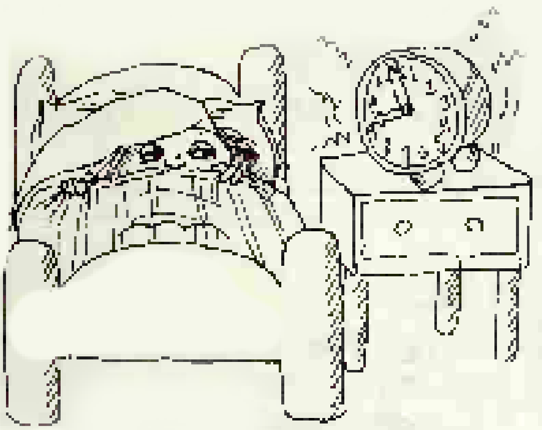
कोडी


तुम्ही सर्वांनाच नेहमी मूर्ख बनवू हाकत नाही. फक्त तसा प्रयत्न करू शकता.
या सर्व कोड्यांचा गाणिताशी बऱ्यापैकी संबंध आहे, काही कोडी बरीच जुनी आहेत. काही मोठया माणसनी ही आधी ऐकलेली असतील. पण त्यांना उत्तर आठवेलच असे नाही.
जेव्हा तुम्ही हे कोडे घालाल तेव्हा कुणी म्हणेल,
‘हे तुझ्या गृहपाठात आहे काय?’
किंवा: ‘तुला ही चौकशी कशाला?’, ‘जा आपल्या आईला विचार.’, ‘जा बाहेर जाऊन खेळ.’ असले काही तरी.
पण नाउमेद होऊ नका. म्हणा,
‘हे गणित विषयक आहे.’
आणि पुनः विचारा.
‘दोन मुले बुद्धिबळ खेळत होती. ते पाच डाव खेळले. प्रत्येकाने जिंकलेल्या खेळांची संख्या सारखीच होती. आणि कोणताही खेळ बरोबरीत सुटला नाही. हे कसे शक्य आहे?’
जेव्हा मोठा म्हणेल ‘माहीत नाही.’ तर म्हणा,
‘ते एकमेकबरोबर खेळत नव्हते.’
आता पुढच्या प्रश्नाला तयार रहा.
‘याचा गाणिताशी काय संबंध?’
म्हणा, ‘अंकगणित हा गणितातलच भाग आहे.’ शिवाय, ‘तर्कशुद्ध विचार गणितात आवश्यक आहे.’
आता ठरवा: आणखी काही कोडी मोठयास विचारायची की आपापसात सोडवायची.

आणखी कोडी

आणखी काही कोडी येथे आहेत. आधी स्वतः प्रयत्न करा आणि मग उत्तर पहा.
या पुस्तकाचा तुम्हाला फायदा होतो असे दिसतेय.

कोडे 2: घड्याळात तुम्ही सकाळी 9 साठी गजर लावून रात्री 8 ला झोपलात तर किती वेळ झोप मिळेल?



उत्तर: एक तास, कारण गजर रात्री 9 लाच वाजेल. हे तर साधे वजबाकीचे गणित आहे.

(आजकालच्या smart फोन मध्ये सकाळ रात्र हे ठरवता येते. जुन्या गजराच्या घड्याळात नाही.)

काही महिन्यात 31 दिवस असतात आणि काही महिन्यात 30 दिवस असतात. किती महिन्यात 28 दिवस असतात?



उत्तर: सर्वच महीने.

तर्कशुद्ध विचार ही गणिताची पहिली पायरी आहे.

कोडे 3: सर्व साधारण माणसाचे किती वाढदिवस असतील?



याचा गणिताशी काय संबंध? आकडेशास्त्र हा गणिताचा एक भाग आहे ना?

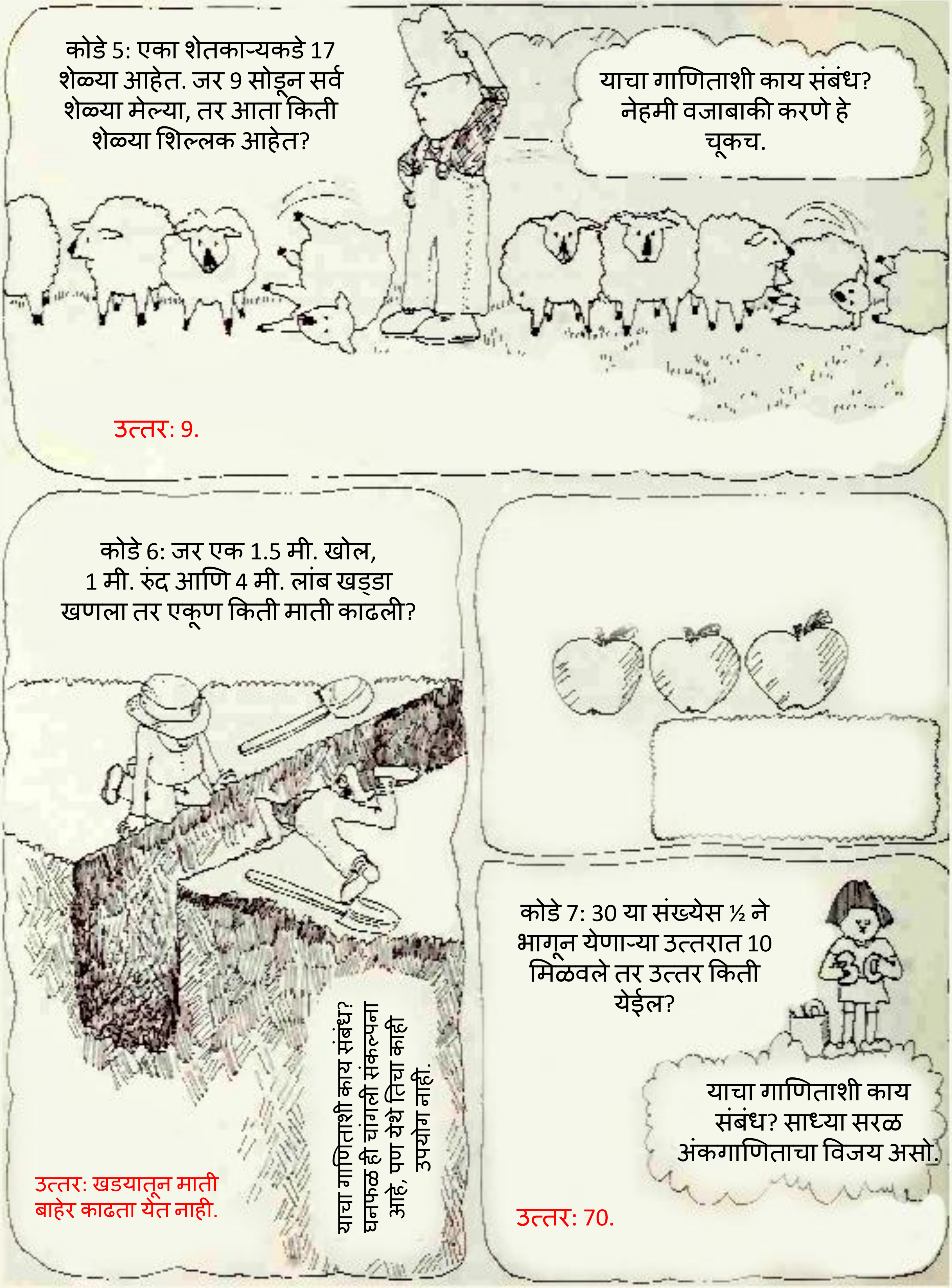
उत्तर: एकच, जसा प्रत्येकाचा असतो.

कोडे 4: जर 10 माणसे 10 दिवसात एक खड्डा खणतात तर पाच माणसांना अर्धा खड्डा खणण्यास किती दिवस लागतील?



याचा गणिताशी काय संबंध? गणितात गुणोत्तर या विषयावर आपण आधी बोललो आहोत.

उत्तर: 10 दिवस.



कोडे 5: एका शेतकाऱ्यकडे 17 शेळ्या आहेत. जर 9 सोडून सर्व शेळ्या मेल्या, तर आता किती शेळ्या शिल्लक आहेत?
याचा गाणिताशी काय संबंध? नेहमी वजाबाकी करणे हे चूकच.
उत्तर: 9.
कोडे 6: जर एक 1.5 मी. खोल, 1 मी. रुंद आणि 4 मी. लांब खड्डा खणला तर एकूण किती माती काढली?
याचा गाणिताशी काय संबंध? घनफळ ही चांगली संकल्पना आहे, पण येथे तिचा काही उपयोग नाही.
उत्तर: खडयातून माती बाहेर काढता येत नाही.
कोडे 7: 30 या संख्येस ½ ने भागून येणाऱ्या उत्तरात 10 मिळवले तर उत्तर किती येईल?
याचा गाणिताशी काय संबंध? साध्या सरळ अंकगाणिताचा विजय असो.
उत्तर: 70.

कोडे 8: अंधाऱ्या खोलीत एका कपाटाच्या खणात 10 पांढरे आणि 10 काळे मोजे आहेत. यातून किती मोजे घेतले की नक्की एक जोड मिळेल?



याचा गणिताशी काय संबंध? गणितात तार्किक विचार असतो.

उत्तर 3.

कोडे 9: माझ्याकडे 55 रुपये किमतीच्या दोन नोटा आहेत. त्यातली एक 5 रुपयाची नोट नाही. तर कोणत्या दोन नोटा आहेत?



याचा गणिताशी काय संबंध? तार्किक विश्लेषण नेहमीच कामाला येते.

उत्तर: 50 आणि 5 रूपयाच्या नोटा. एक 5 ची नाही, दुसरी आहे.

कोडे 10: जर डॉक्टरने तीन गोळ्या दिल्या आणि दर अर्ध्या तासाने एक गोळी घ्यायची असे सांगितले तर किती वेळात गोळ्या संपतील?



याचा गणिताशी काय संबंध? मोजमाप हा गणिताचा एक भाग आहे. वेळ ही मोजमाप करण्याची गोष्ट आहे.

उत्तर: एक तास.

कोडे 11: जर एक डझन पाच रूपयाची तिकिटे म्हणजे बारा तिकिटे तर एक डजन 10 रुपयाची तिकिटे म्हणजे किती?



यात गणित कोठे आहे? डझन म्हणजे डझन म्हणजे बारा.

उत्तर: बारा.

कोडे 12: एका पक्षापूढे जर दोन पक्षी आणि एका पक्षामागे दोन पक्षी आणि दोन पक्षामध्ये एक पक्षी असे उडत असतील तर एकूण कमीतकमी पक्षी किती?

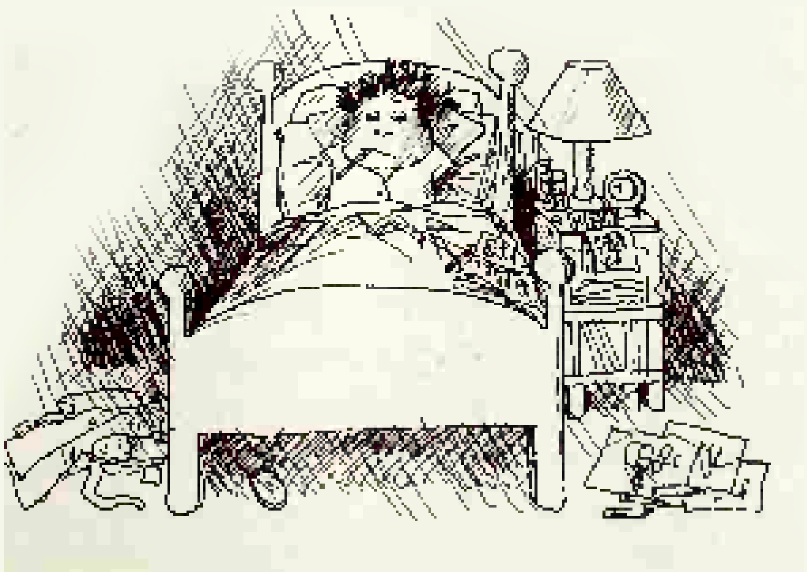


यात गणिताचा काय संबंध? रांगेत उडणारे पक्षी सुंदर दिसतात.

उत्तर: एकामागोमाग एक असे तीन.

अंगात हिवताप भरला की करायच्या गोष्टी

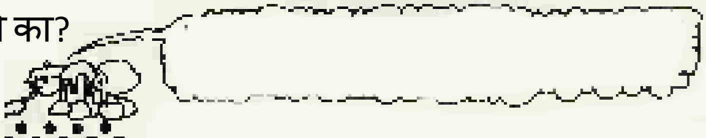
तुम्ही थंडीतापाने आजारी आहात.
डॉक्टरने विश्रांती घ्यायला सांगितले आहे.
झोप तर येत नाही. वाचायचा कंटाळा आला आहे.
कोणी खेळायला जवळ नाही.
टीव्ही वर काही कार्यक्रम नाही.
अशा वेळी थोडा गणिताचा डोस घ्या.
‘कडू’ वाटतो? पण आंथरूणात पडल्या पडल्या घेता येतो. फक्त काही वस्तु, कागद, पेन्सिल, कात्री सारख्या लागतील. पण यामुळे तुमचे गणित मात्र सुधारेल.

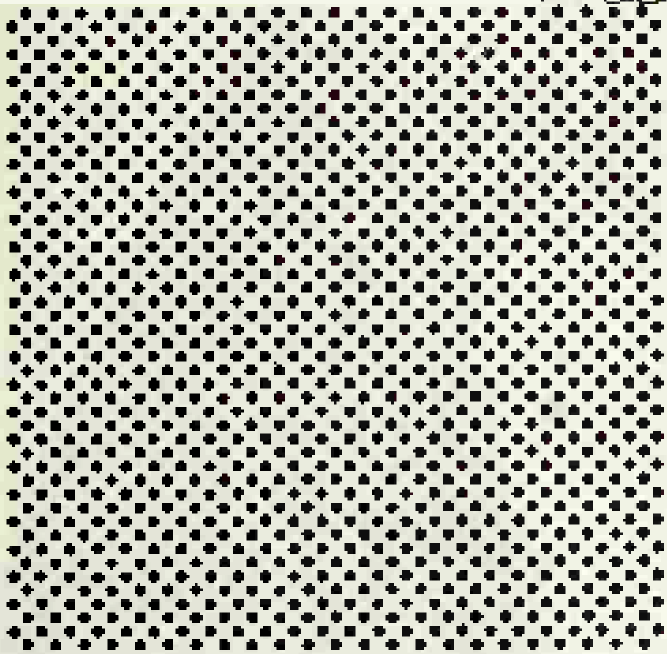


छत कशासाठी?



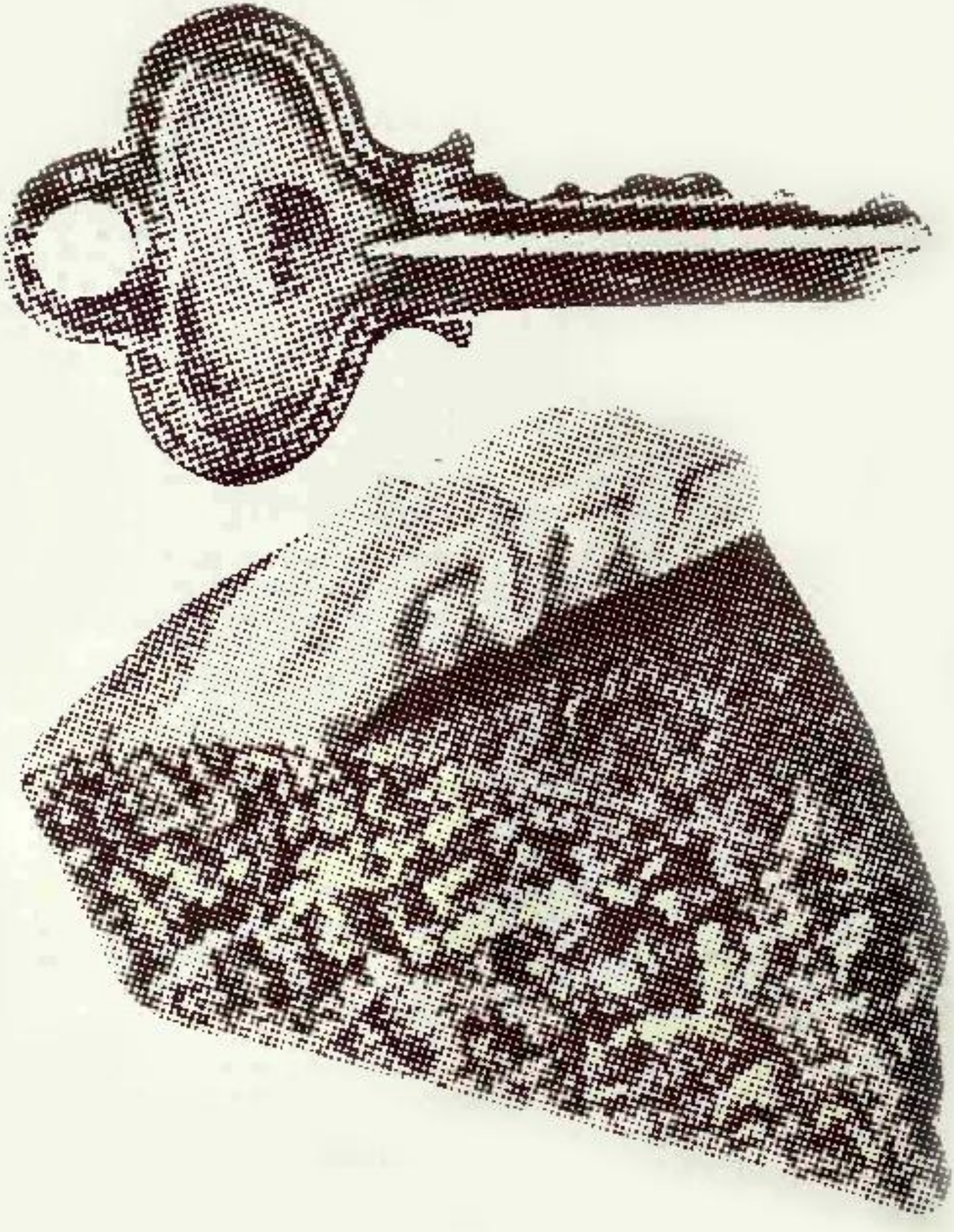
जर तुमच्या छतावर ठिपके असतील तर ते मोजू शकता. अर्थात तसे ठिपक्यांचे छत असेल तरच. पुढच्या चित्रात किती ठिपके आहेत? सगळे मोजत बसू नका. आधी एक अंदाज करा. मग सगळे ठिपके न मोजता काही अनुमान काढता येते का पहा. अंदाज आणि अनुमान एकच काय? आता शेजारच्या रिकाम्या चौकोनात किती ठिपके बसू शकतील याच काही अंदाज लागतो का?

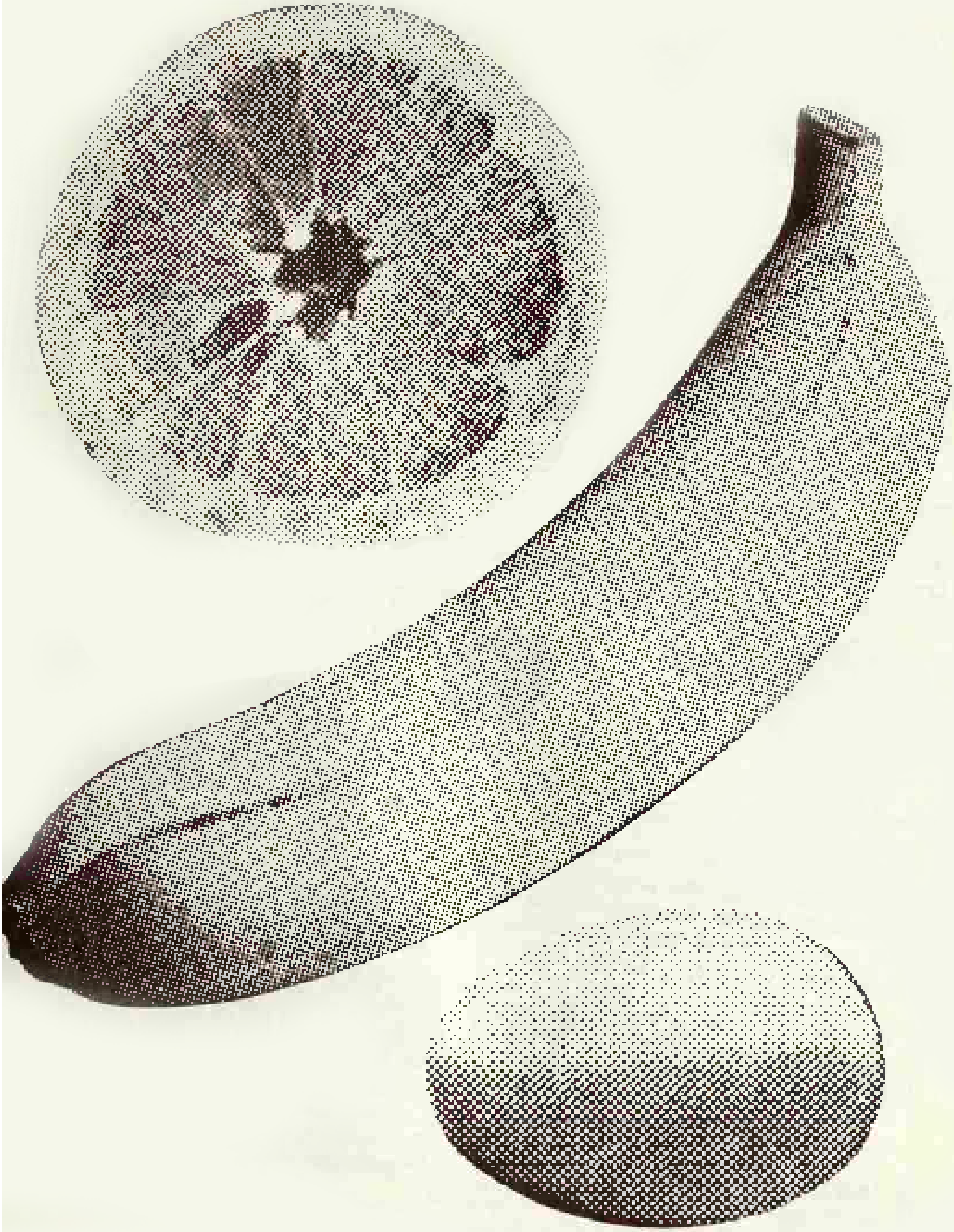


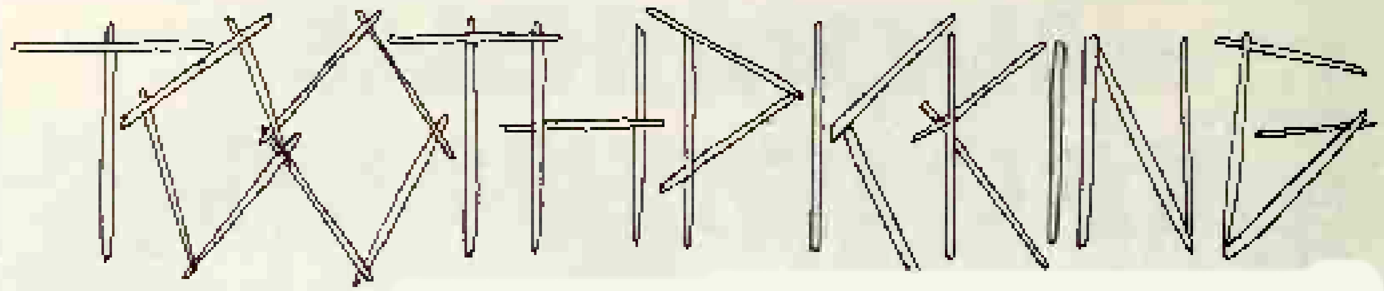


पुढील दोन पानावर ठिपक्यानी मिळून काही चित्रे काढली अहत. जर ठिपके अजून बारीक असते तर ते चित्र एका छापील पानावर आहे असे वाटेल. फोटोग्राफ असेच छापले जात असतात. एका केळ्यात किती ठिपके आहेत? आणि चावीत?

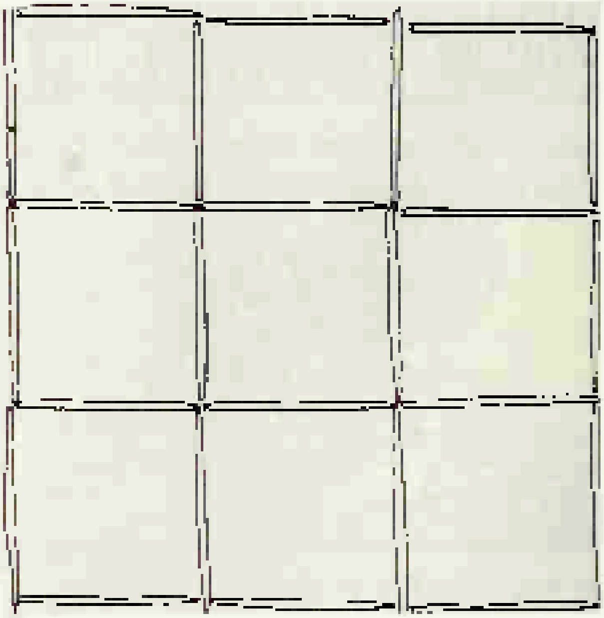
आता पुरे झाले ठिपक्यांचे पुराण

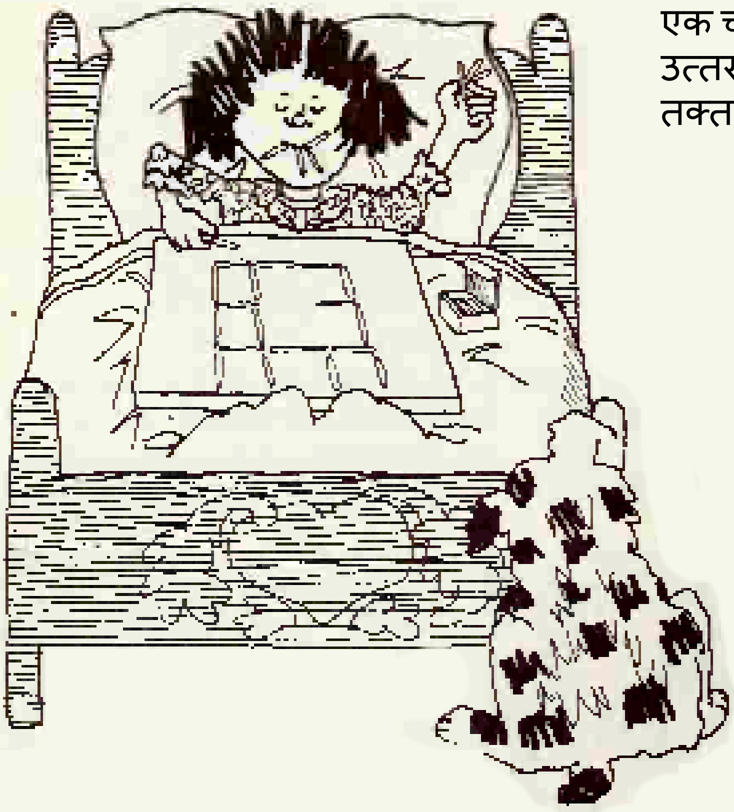




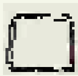


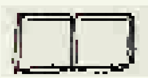
चित्रात दाखविल्याप्रमाणे 24 काड्या जोडून ठेवा. तुम्हाला एकूण किती चौरस दिसतात? चटकन 9 म्हणू नका. चित्राकडे पहात रहा. 14 हे उत्तर सुचेपर्यंत. आता यातल्या 8 काड्या अशा काढून घ्या की उरलेल्या आकृतीत फक्त दोन चौरस राहतील. हा प्रश्न वाजबाकीचा नाही. यात भूमिती अधिक आहे.





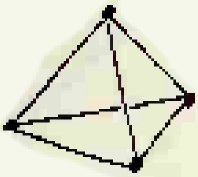
एक चौरस बनवायला किती काड्या लागतात? उत्तर आहे 4. दोन चौरसांना 7. शक्य तेवढा तक्ता बनवा.

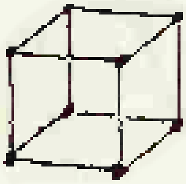


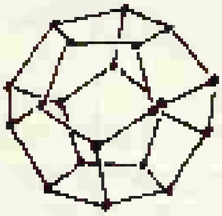


काड्या TOOTHPICKS	चौरस SQUARES
4	1
7	2
	3

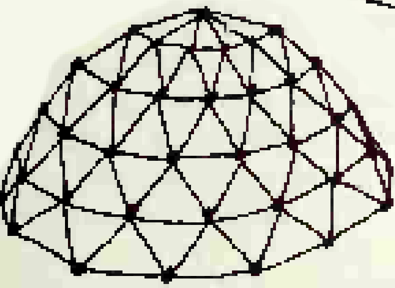
चौरसांचा कंटाळा आला असेल तर त्रिकोणविषयी विचार करा. किंवा आणखी मोठ्या आकृति हव्या असतील तर चतुष्फलक, घन, द्वादशफलक अशा आकृति पहा. या त्रिमित आकृतीत 4 किंवा 6 किंवा 12 8 पृष्ठभाग असतात जे त्रिकोण आगर चौकोन अगर पंचकोन असे असतात.



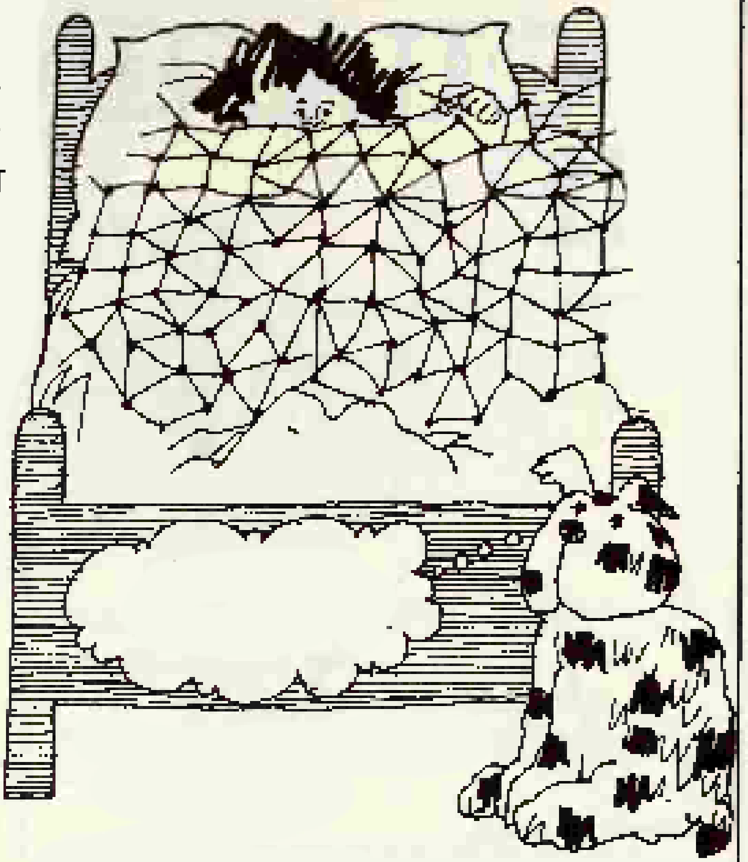




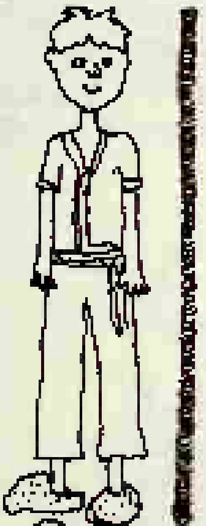
Dodecahedrons.



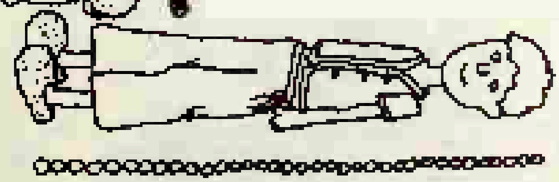
GEODESICS.

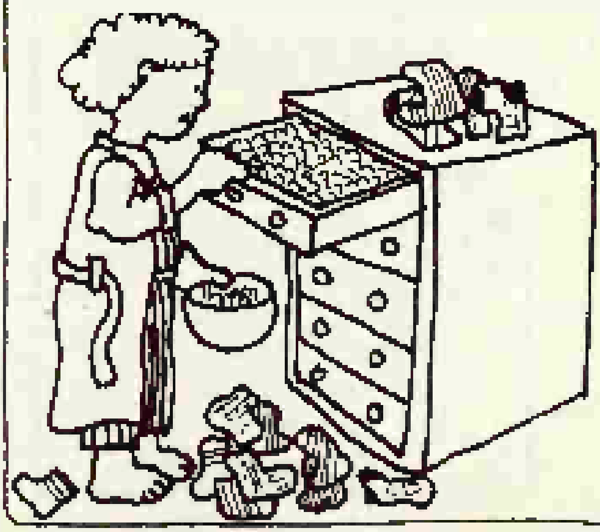


आणखी एक कोडे: सहा आगकाड्या अशा ठेवता येतील का की प्रत्येक काडी इतर काड्याना स्पर्श करते. (असे घडू शकते.)



तुमच्या ऊंची इतकी पन्नास पैशाची नाणी एकाला जोडून एक अशी आवडतील की एक रुपयाची नाणी तेवढ्याच उंचीची नाणी जास्त आवडतील?





गणिताची भाषा



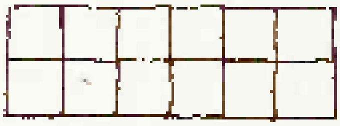
आता पर्यन्त तुमच्या लक्षात आलेच असेल की गणिती मंडळीची अशी एक विशिष्ट भाषा आहे. संस्थिति, वर्गमूळ, इ. सारखे अगडबंब शब्द गणिती लोक वापरतात. तुम्ही याबद्दल फार काळजी करू नका. शब्दाचा अर्थ वगैरे लक्षात ठेवायच्या भानगडीत पडू नका. साधारणपणे शब्द कसा वापरला जातो तेवढे लक्षात ठेवा. एवढेच.

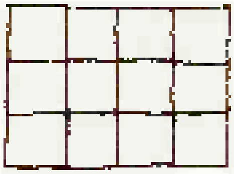


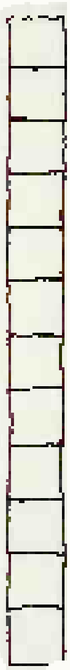
मूळ संख्या



काही संख्या अशा असतात ज्याना 1 किंवा स्वतः ती संख्या या शिवाय दुसऱ्या कुठल्या संख्येने भाग जात नाही. जसे 2,3,5,7,11,13,.. या सर्व मूळ संख्या आहेत. पण 12 ही संख्या पहा. 12 सारख्या आकाराचे चौरस घ्या. त्यांचे वेगवेगळे काटकोन चौकोन करता येतात. पण 7 किंवा 5 चौरस घेतले तर एकच काटकोन चौकोन होऊ शकतो.

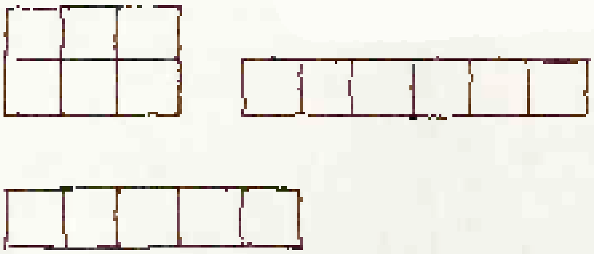


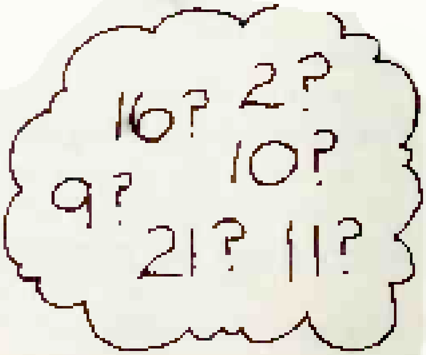






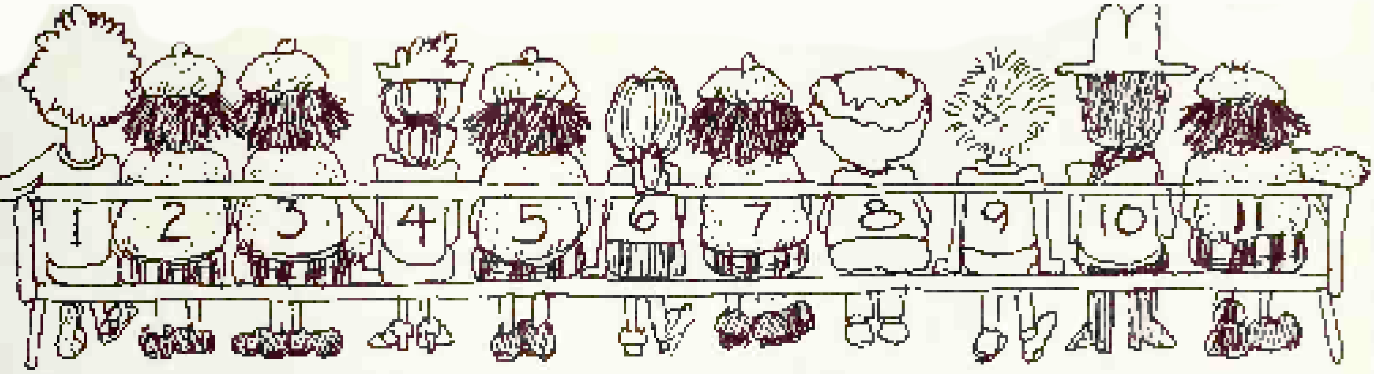


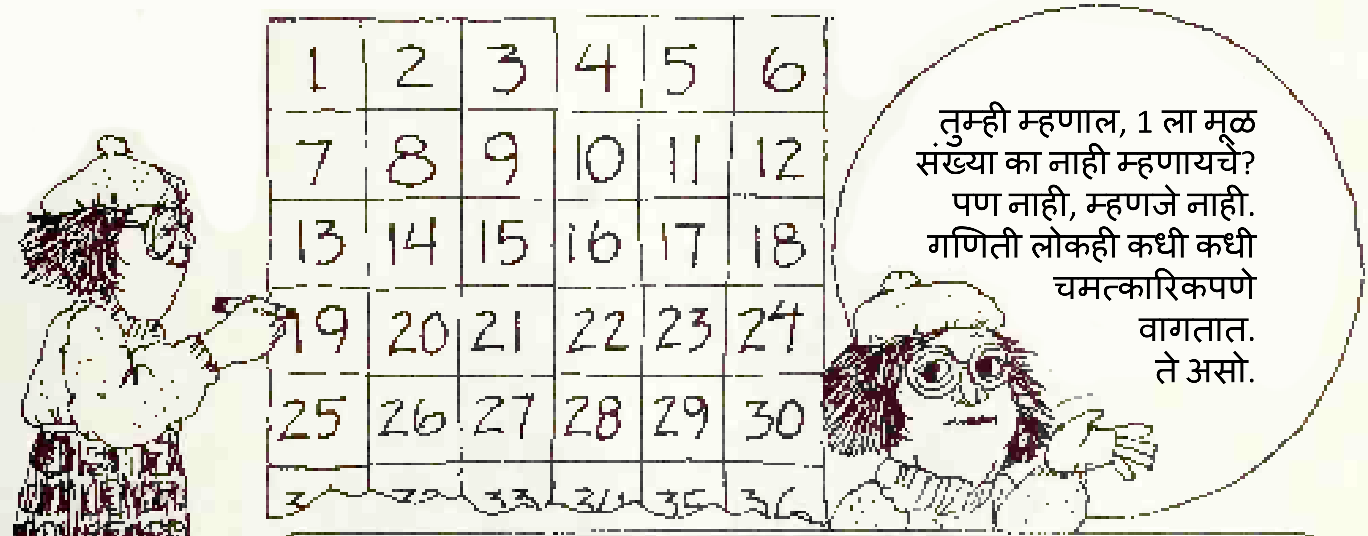




गणितज्ञ अनेक वर्षे मूळ संख्ये साठी नमूना (Pattern) तपासात आहेत पण मिळत नाही. त्यांची व्याख्या सुद्धा मजेदार आहे. ते म्हणतात, “मूळ संख्येस फक्त दोन संख्यानी भाग जाऊ शकतो: 1 आणि ती संख्या स्वतः. म्हणजे फक्त दोन संख्यांचा मूळ संख्येस भाग जातो. पण मूळ संख्या तशा नमुन्यात बसत नाहीत. पहिल्या काही मूळ संख्या अशा:

2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,..





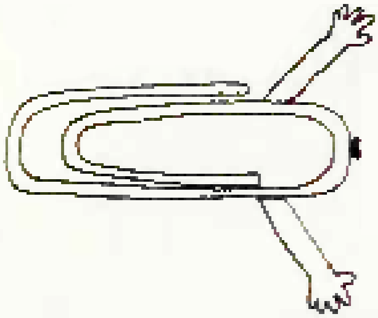
गणितज्ञांना मूळ संख्याचे फार वेड. गोल्डबाक नामक गणीतज्ञाने एक भाकीत केले. प्रत्येक (दोन पेक्षा मोठी) सम संख्या दोन मूळ संख्याची बेरीज अशी लिहिता येते. जसे: 16=11+5, 30=17+13. 40=29+11, इ. हे भाकीत अद्याप सिद्ध झालेले नाही. हे भाकीत गोल्डबाकचे नावाने प्रसिद्ध आहे.

गणित जादूचा प्रयोग

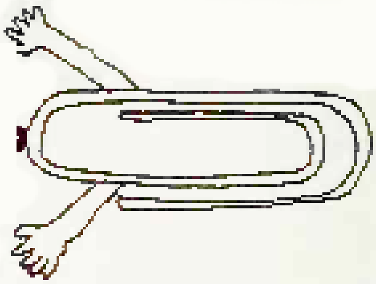
काही लोकाना वाटत गणित हीच मुळी एक जादू आहे.

(ज्याना हे काळात नाही त्यांचं काही नुकसान ही होत नाही)

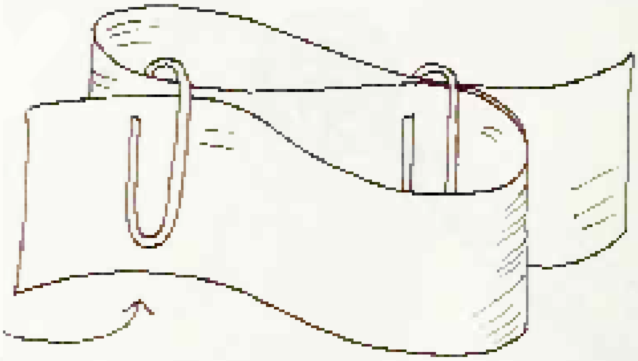




गळा भेटू क्लिपा



साध्या कागदाचा एक लांबडा काटकोन चौकोन घ्या. चित्रात दाखविल्याप्रमाणे तो धरा आणि त्यास दोन क्लिपा जोडा. आता एक सहायक घ्या आणि त्याला कागदाची दोन टोके चित्रात दिसतात त्याप्रमाणे धरायला सांगा. आता अबराकडबरा किंवा असा काही जादूगाराचा शब्द काढा आणि सहायकने कागदाची टोके ओढली की क्लिपा उडून येतील.

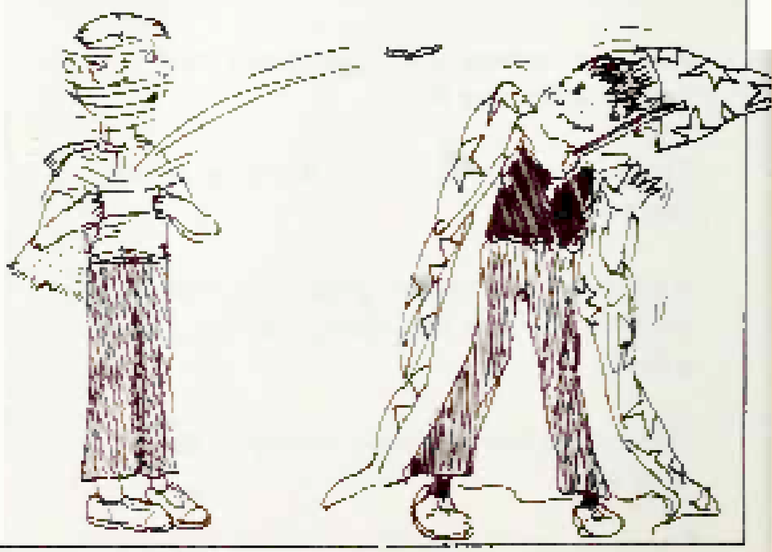




आश्चर्य वाटले ना? गणित (म्हणजे येथे Topology) म्हणते की कागदाची घडी क्लिपांची गळाभेट घडवते. (Topology म्हणजे संस्थिति ज्ञान, विसरला नाहीत ना?),



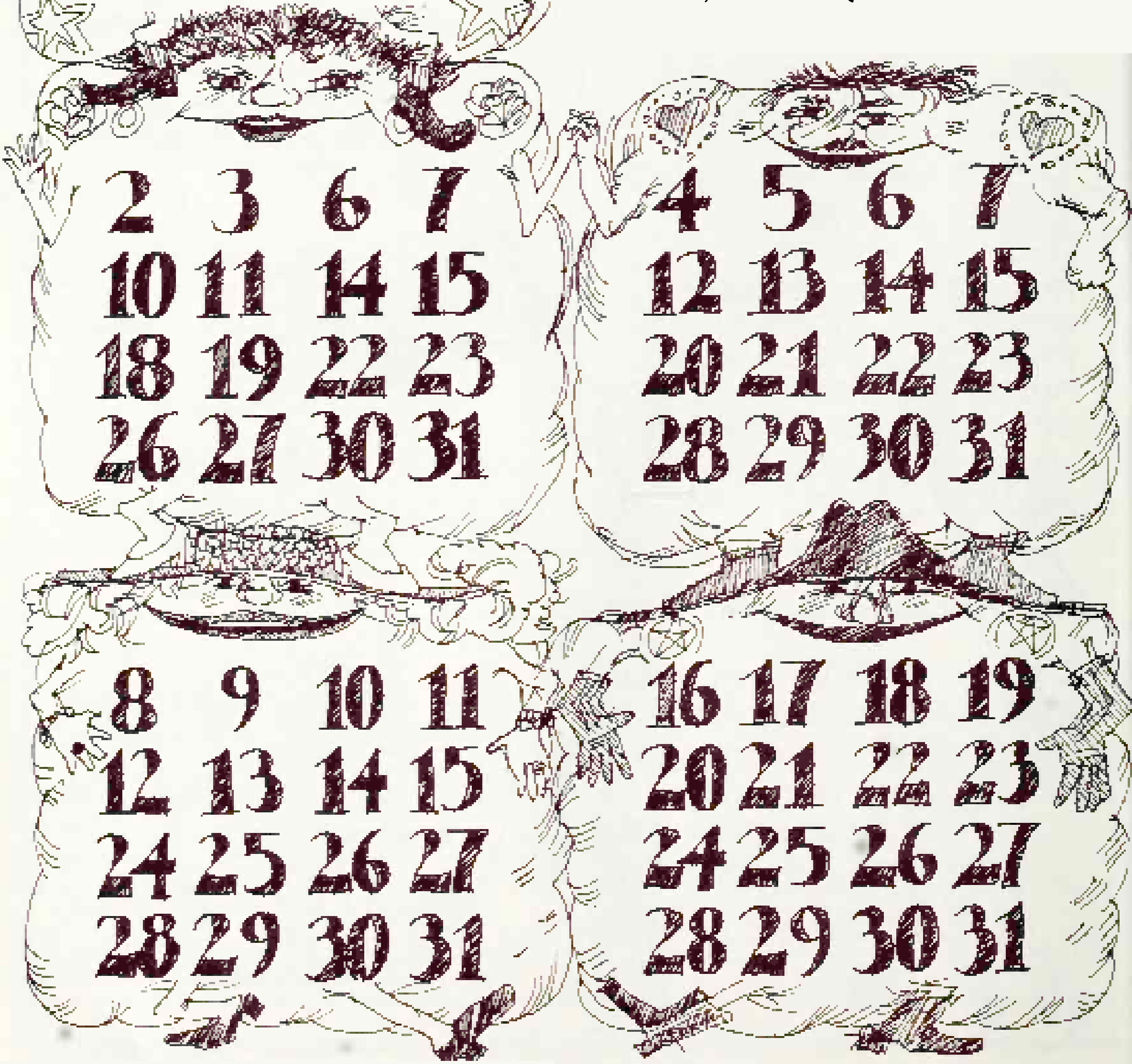
हीच जादू आपल्याला पाच रूपयाच्या नोटेने करता येईल. कागदाची टोके हळू हळू ओढली तर काय होते ते लक्षात येईल, पण नेहमीच तसे होईल हे निश्चित सांगता नाही येत.



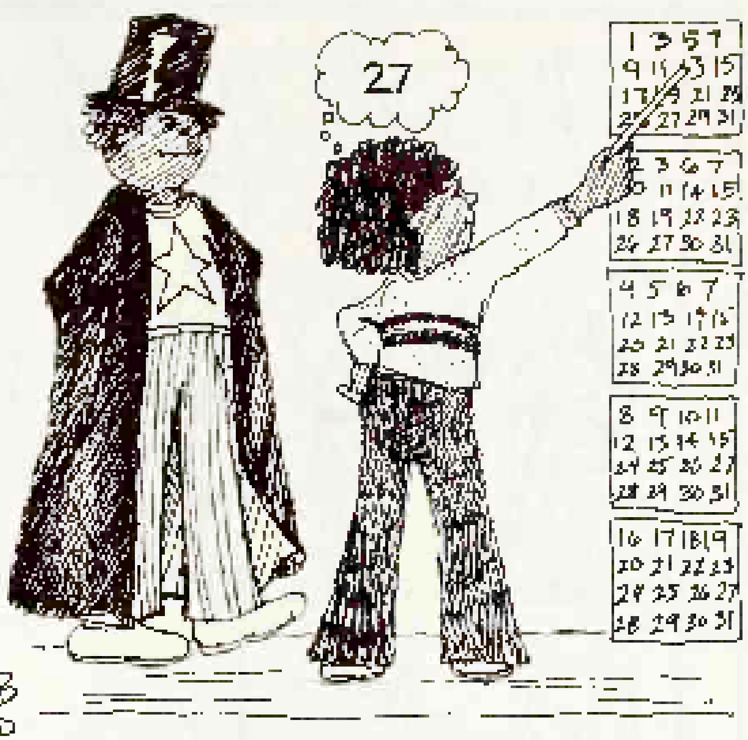
हुशार (Smart) कार्डस

आधी तुम्हाला चित्रात दाखविल्याप्रमाणे पाच कार्डस बनवावी लागतील. प्रत्येक कार्डवर 16 संख्या लिहिल्या आहेत, त्या सर्व 1 ते 31 पर्यन्त च्याच आहेत. कार्ड जर थोडीशी मोठी असतील तर बरे, प्रेक्षकांस सहज वाचता येतील.



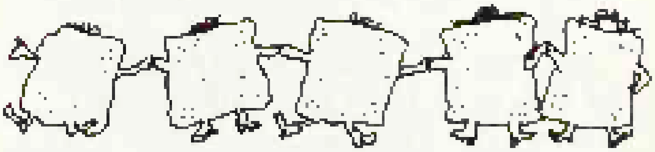


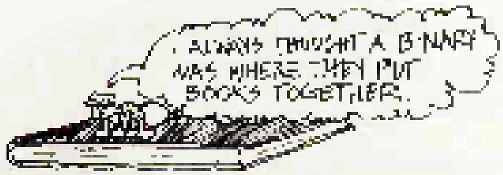
आता कुणालाही 1 ते 31 पैकी एक संख्या मनात धरायला सांगा. मग या पाचापैकी कुठल्या (एक किंवा अधिक) कार्डांवर ती संख्या आहे ते विचारा. आता ज्या कार्डांवर ती संख्या असेल त्या कार्डांवरच्या पहिल्या संख्यांची बेरीज केली की ती संख्या ओळखता येते. स्वतः करून पहा.



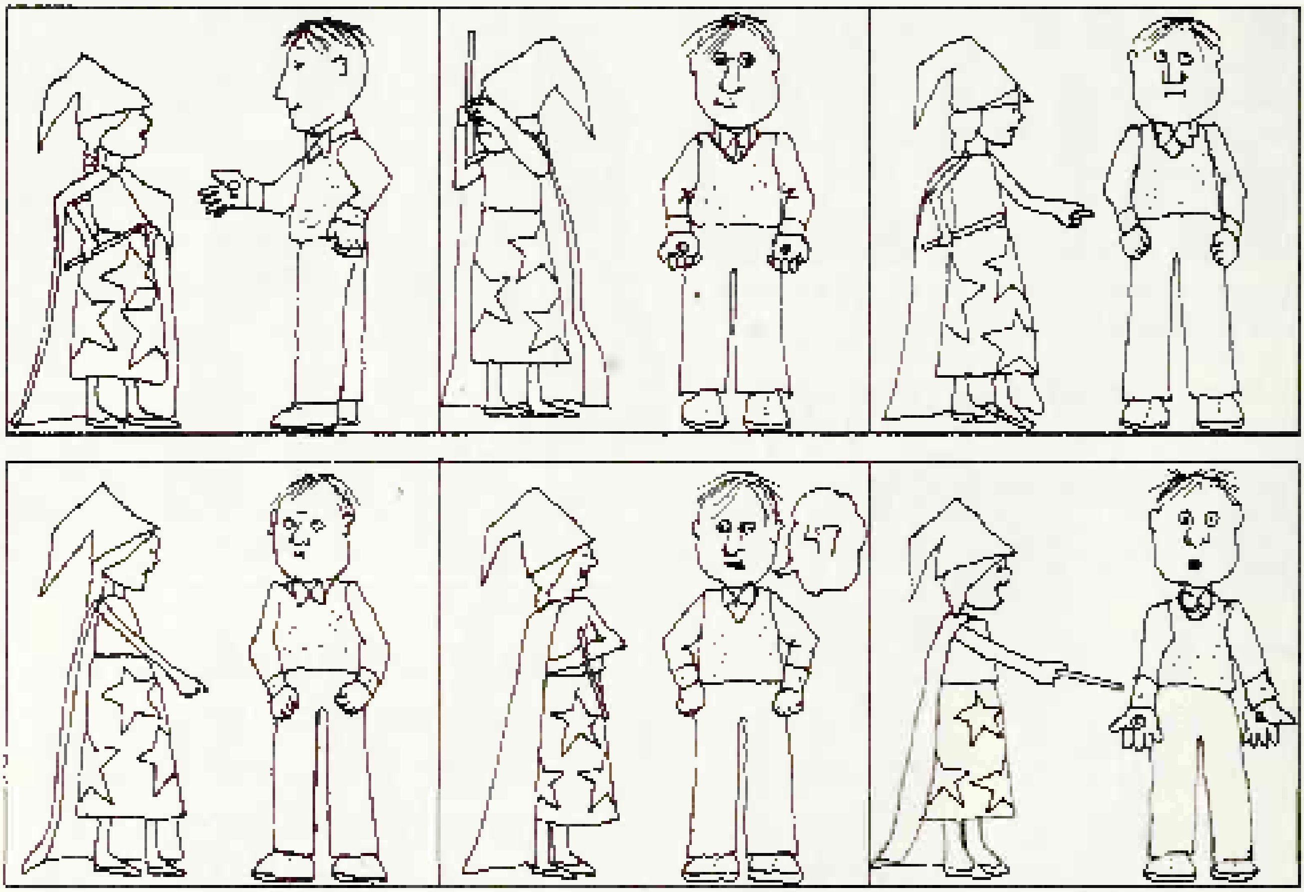


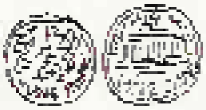
द्विमान पद्धत: 1, 2, 4, 8, 16, 32 इ.
हे सर्व दोन चे घात आहेत. त्यांच्याशी द्विमान पद्धती चा संबंध आहे. सर्व सांगणकांचा या द्विमान पद्धतीशी संबंध आहे.





आता दुसरी जादू





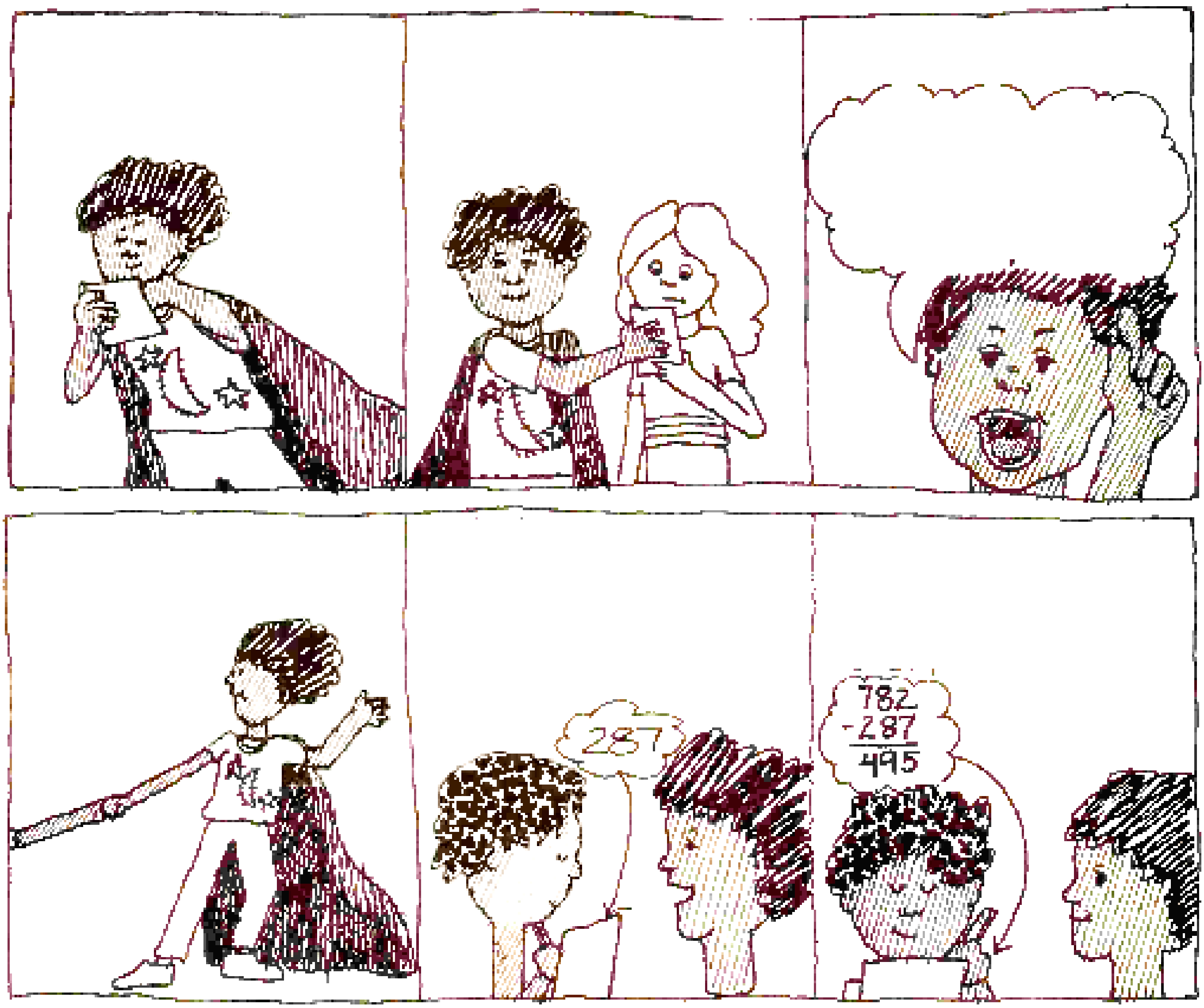
गुणाकार चटकन करता येणाऱ्या एका मित्रास एका हातात एक रुपयाचे नाणे आणि दुसऱ्यात 10 रुपयाचे नाणे धरायला सांगा. त्याने इतर प्रेक्षकांस नाणी दाखवावी पण “मला दाखवू नको” असे बाजाऊन सांगा. आता म्हणा तुमच्या उजव्या हातातील नाण्याच्या 4 किंवा 6 किंव 8 पट (कोणतीही) करा, मला उत्तर सांगू नका. त्या संख्येत दुसऱ्या हातातील नाण्याच्या किमतीची 3 किंवा 5 किंवा 7 पट (कोणतीही) मिळवा.आता उत्तर काय ते विचारा.

जर उत्तर सम संख्या असेल तर उजव्या हातात एक रुपया आहे, आणि जर उत्तर विषम संख्या असेल तर डाव्या हातात रुपया आहे. उत्तर नेहमीच बरोबर येणार, जर मित्राने बेरीज-गुणकारात चूक नाही केली तर. ही जादू संख्यांच्या स्थान मूल्यावर अवलंबून आहे. स्थान मूल्य म्हणजेच एकम, दहम, शतम,इ.

आधी उत्तर आणि मग प्रश्न?

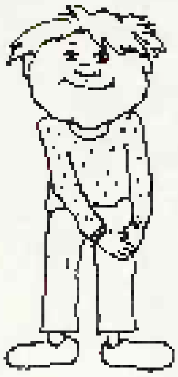
आधी खूप विचार करीत आहे असे दाखवून एका कागदावर 1089 ही संख्या लिहा. हा कागद प्रेक्षकांतील एका जवळ द्या. आता दुसऱ्या एकाला म्हणा ‘मला एक अशी तीन अंकी संख्या दे जिचे तिन्ही अंक वेगवेगळे असतील. त्याने दिलेल्या संखेत पहिला आणि तिसरा अंक यात एकापेक्षा जास्त अंतर असले की झाले, नाही तर आणखी दुसरी संख्या निवडायला सांगा. मनाजोगति संख्या मिळाली पाहिजे. आता म्हणा की संख्या उलट करून लिहा आणि मोठीतून छोटी वजा करा. आता आलेल्या संख्येची उलट करू दोहोंची बेरीज करायला सांगा. आणि म्हणावे उत्तर मोठ्याने सांग. उत्तर 1089 असणार. मग पहिल्या प्रेक्षकाला कागदावरील उत्तर सर्वांना दाखवायला सांगा. सर्व लोक आश्चर्याने तोंडात बोट घालतील.

प्रेक्षक म्हणतील पुन्हा करा. पण नका करू. लोक नमूना तपासून पाहतील आणि त्यांना जादू कळायला लागेल. तर म्हणा, ‘आता पुरे’. आणि तेथून हवे तर चालते व्हा.

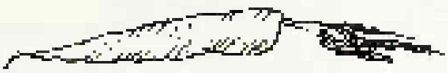


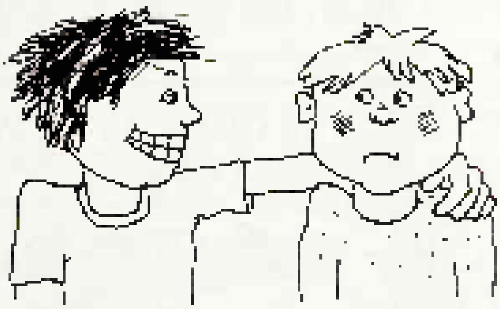
विष खाण्याचा खेळ

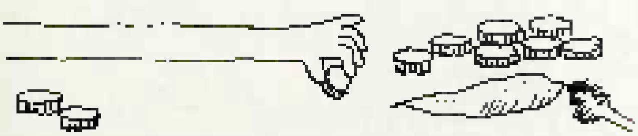
आता एक नवा खेळ खेळा आपल्या मित्राबरोबर. 12 सारख्या वस्तु, घ्या. उदा., चिंचोके, किंवा बाटल्यांची बूचे. एक वेगळी वस्तु हवी जिला आपण विष म्हणू. प्रत्येकाने एका वेळी एक किंवा दोन वस्तु (विष सोडून) काढून घ्यायच्या. जेव्हा फक्त विष उरेल तेव्हा ज्याची पाळी तो विष खाऊन मरेल.

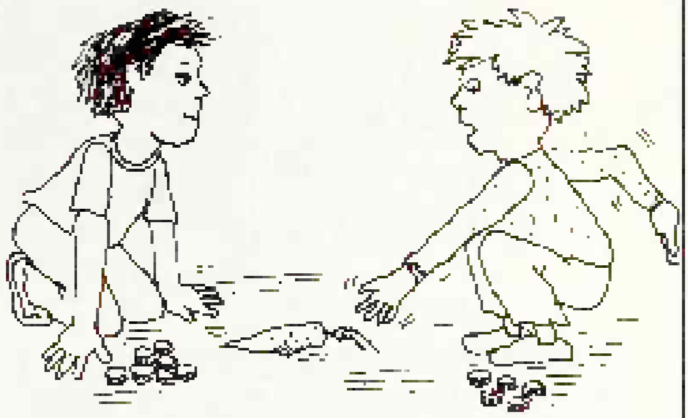












तुम्ही दर वेळी विषापासून कसे वाचाल? तुमचे तुम्हीच शोधून काढा. (सगळेच मी सांगायचे का?) पण काही उपयुक्त सूचना किंवा प्रश्न: पहिल्याने आपण जावे की दुसऱ्याने? 12 पेक्षा अधिक वस्तु बऱ्या का 12 च बऱ्या? नियम बदलून 1 किंवा दोन किंवा तीन वस्तु घेण्याचा करावा का? काही वेळा खेळलात की कसे खेळावे हेही कळेल.

या सारखे आणखी काही खेळ आहेत ज्या सर्वांना “निम” या नावाने संबोधतात. हा एक निम खेळ: काड्या चित्रात आहेत अशा प्रकारे गटाने मांडा. नियम असा की आपली पाळी असताना कुठल्याही एका गटातून किमान एक किंवा कितीही (सर्व सुद्धा) काड्या उचलायच्या.



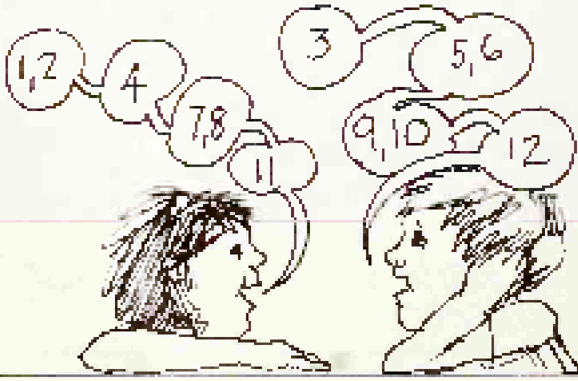
ज्याला शेवटची कडी उचलावी लागेल तो हरला.

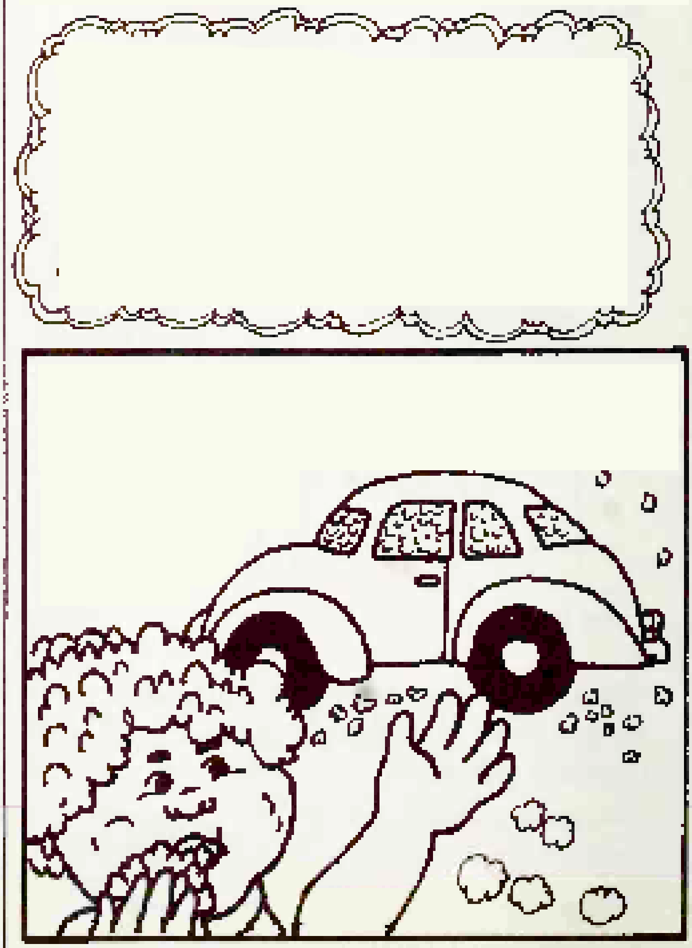
वीस पर्यन्त पोचायचे हा खेळ



समजा आईबाबाच्या गाडीत तुम्ही भावंडे खूप आरडाओरड करीत आहात. इतके की आता तुम्ही गप्प नाही बसलात तर तुम्हाला शिक्षा होणार.

अशा वेळी गाडीत शांतता ठेवण्यासाठी एक खेळ खेळता येईल. दोघात खेळायला हा खेळ सोपा. प्रत्येकाने एक किवा दोन संख्या संगायच्या. ज्याला वीस मिळेल तो जिंकणार. चित्रातल्या प्रमाणे खेळून पहा.

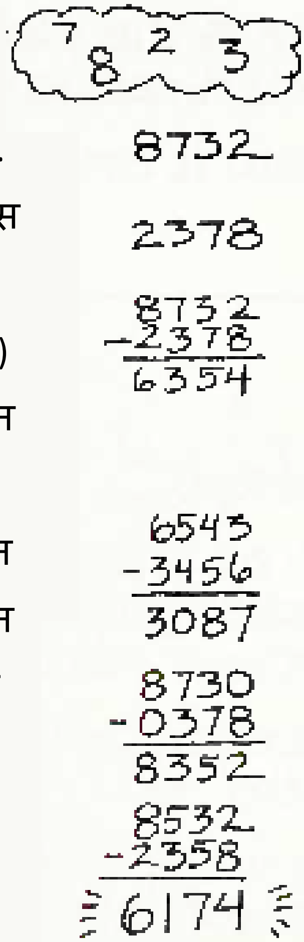




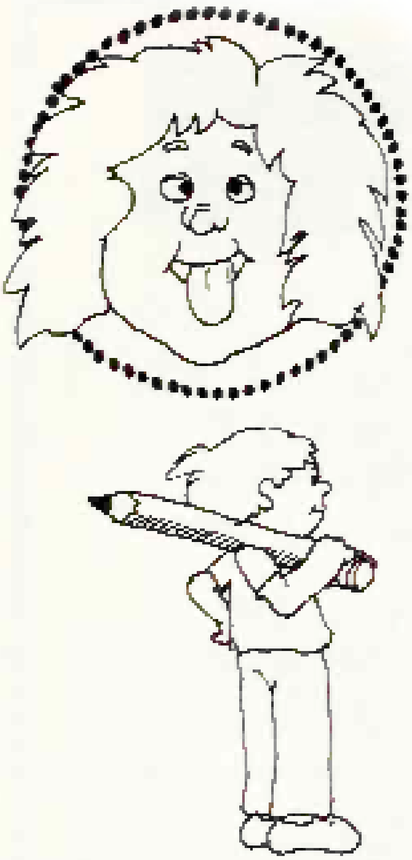
काप्रेकर संख्या

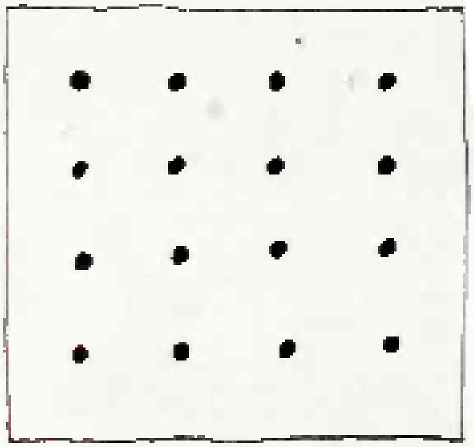


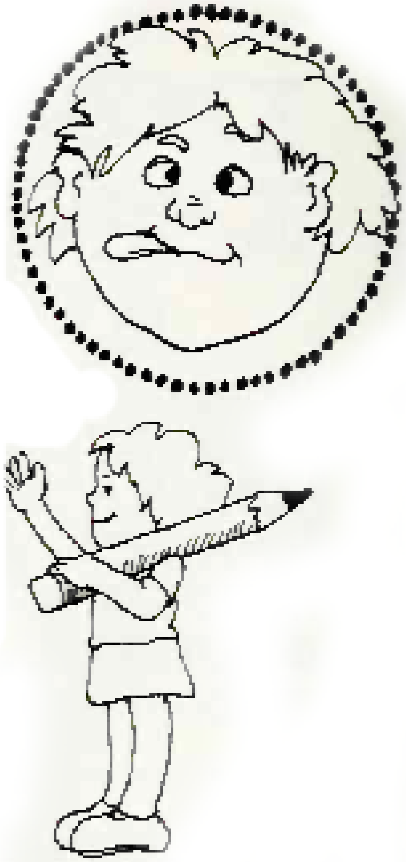
काप्रेकर हे नाशिकच्या एका शाळेत शिक्षक होते.
नुसतेच शिक्षक नाही तर अत्यंत हुशार आणि कष्टाळू शिक्षक होते.
त्यांनी बराच वेळ खर्चून एक नियम शोधून काढला. 6174 या संख्येस
काप्रेकर अचल संख्या असे म्हणतात. हा खेळ असा खेळायचा:
0 पासून 9 पर्यन्त कोणतेही चार अंक (सगळे सारखे नाही चालणार)
घ्या. त्या चौघापासून बनणारी मोठ्यात मोठी आणि लाहनात लहान
अशा दोन संख्या बनवा. आता मोठीतून लहान वजा करा. छान.
या नवीन आलेल्या संख्येपासून पुनः मोठ्यात मोठी आणि लहानात
लहान अशा दोन संख्या बनवा. मोठीतून लहान वजा करा. कंटाळा न
करता ही प्रक्रिया करत रहाल तर तुम्हाला 6174 हा काप्रेकर अचल
मिळेल. कधी दोन वेळा तर कधी आठ अगर दहा वेळा हे करावे
लागेल. एकदा काप्रेकर अचल संख्या आली की मग मात्र तीच पुनः
पुनः येत राहते.



बिंदु बिंदु चा खेळ

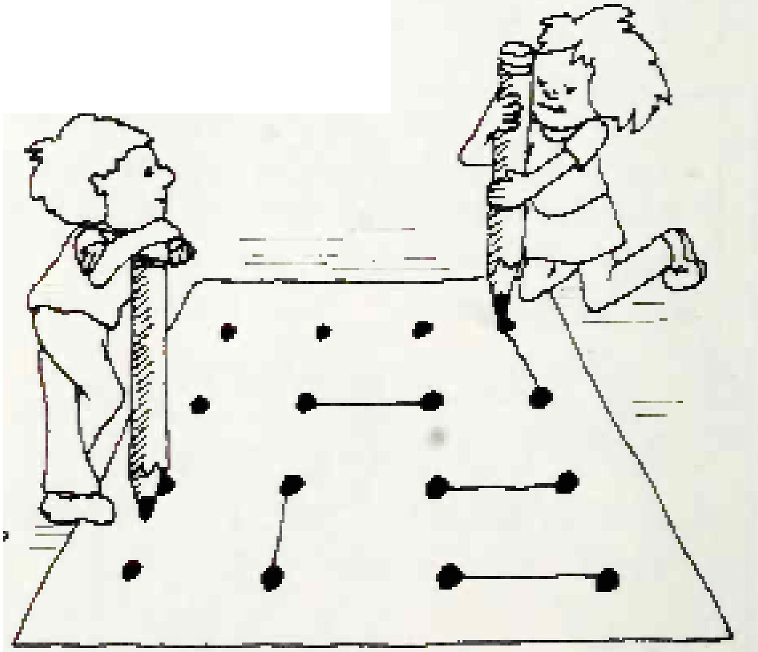






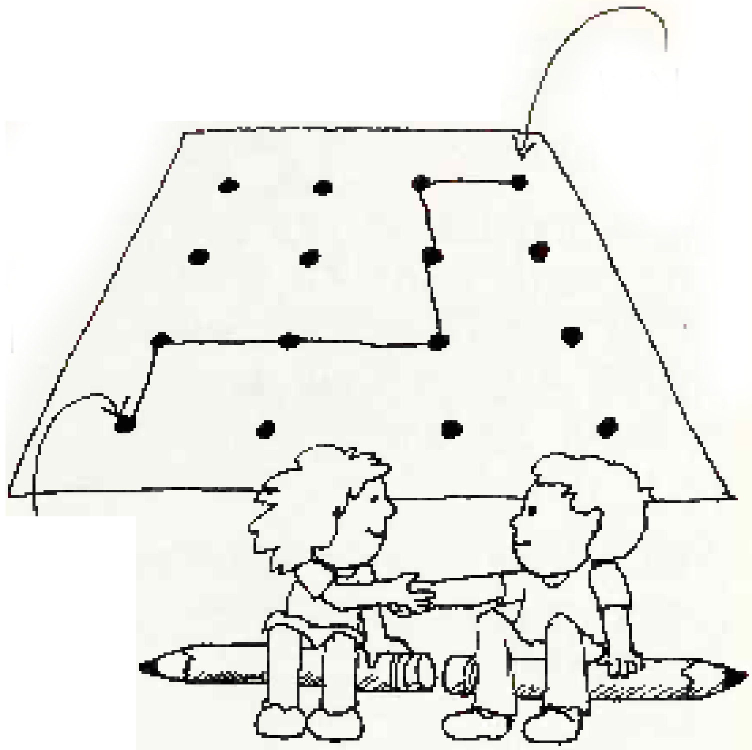
1. जोडणी

येथे खेळ सुरू होतो. आधी एका मैदानात चार बाय चार असे सोळा बिंदु काढा. खेळण्यासाठी एका मित्राला बोलवा. एक बिंदु दुसऱ्या एकाच बिंदुस जोडता येतो. दोन बिंदूची जोडणी करायची ते उभ्या किंवा आडव्या रेषेत हवेत. जो शेवटची जोडणी करतो तो जिंकणार.



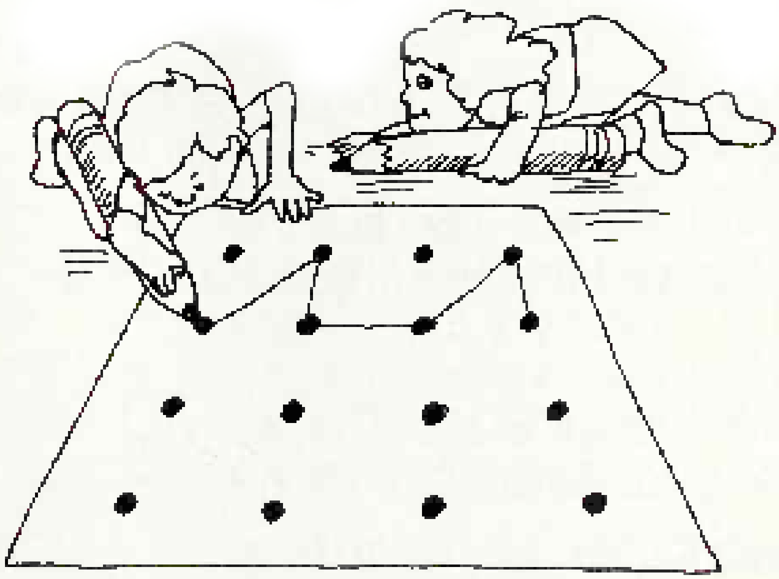
खेळ 2. वर किंवा उजवा

हा खेळ डावीकडे सर्वात खाली सुरू होतो. तुम्ही फक्त वर किंवा उजवीकडे दोन दोन बिंदु जोडत जायचे आहे. सर्वात शेवटी वरचा उजवा बिंदु मिळवणारा जिंकतो.



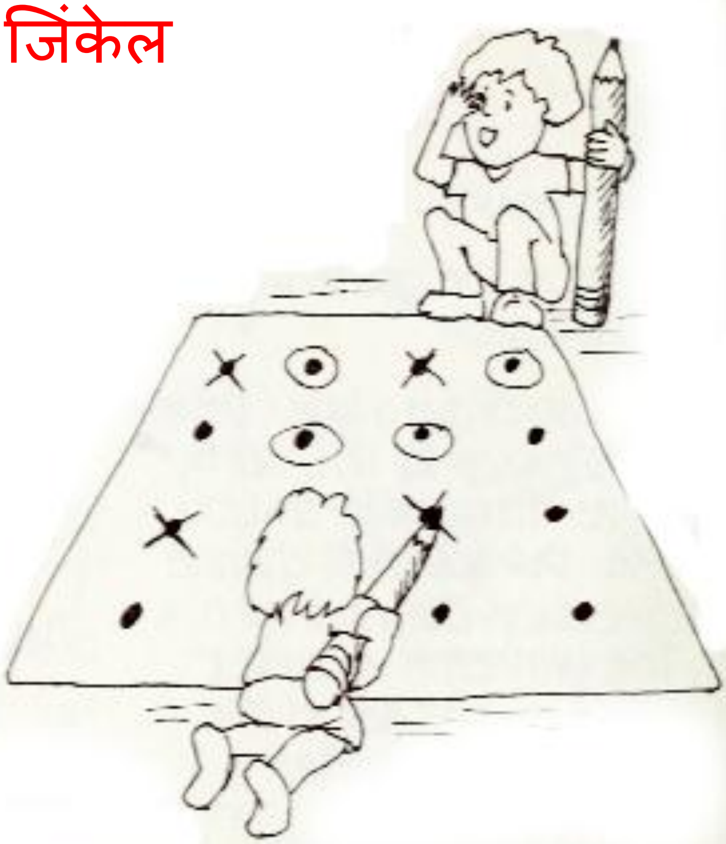
खेळ 3. मुसंडी मारणे.

एक लांब लचक रेषा सरळ, आडवी अगर चौकोनाच्या कर्णासारखी काढता येईल. तुमची रेषा असलेल्या आकृतीतील कुठल्याही बिंदुपासून काढता येईल. रेषा मात्र सरळ हवी. जो शेवटची रेषा काढेल तो जिंकणार.



खेळ 4. चौरस जिंकेल

तुम्ही वर्तुळ आणि मित्र फुली,
असे एकेका बिंदु भोवती करू
शकता. जो पहिल्याने चार खुणा
अशा करेल की ज्यामुळे एक
चौरस पूर्ण होतो तो जिंकेल.

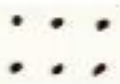


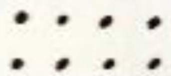
छोटा विचार करणे बरे

प्रत्येक खेळात बिंदूची संख्या कमी ठेवून कसे खेळायचे ते ठरवा. उदा., जोडणीच्या खेळात चार बाय चार ऐवजी दोन बाय दोन बिंदु घेऊन पहा. तुम्ही दुसऱ्यांदा खेळून नक्की जिंकू शकाल. आता दोन बाय तीन असे सहा बिंदु घ्या. आता तुम्ही पहिल्याने गेलात तरच जिंकू शकाल.

आता आठ बिंदु मध्ये काय घडेल?
काही नमूना मिळतो काय?



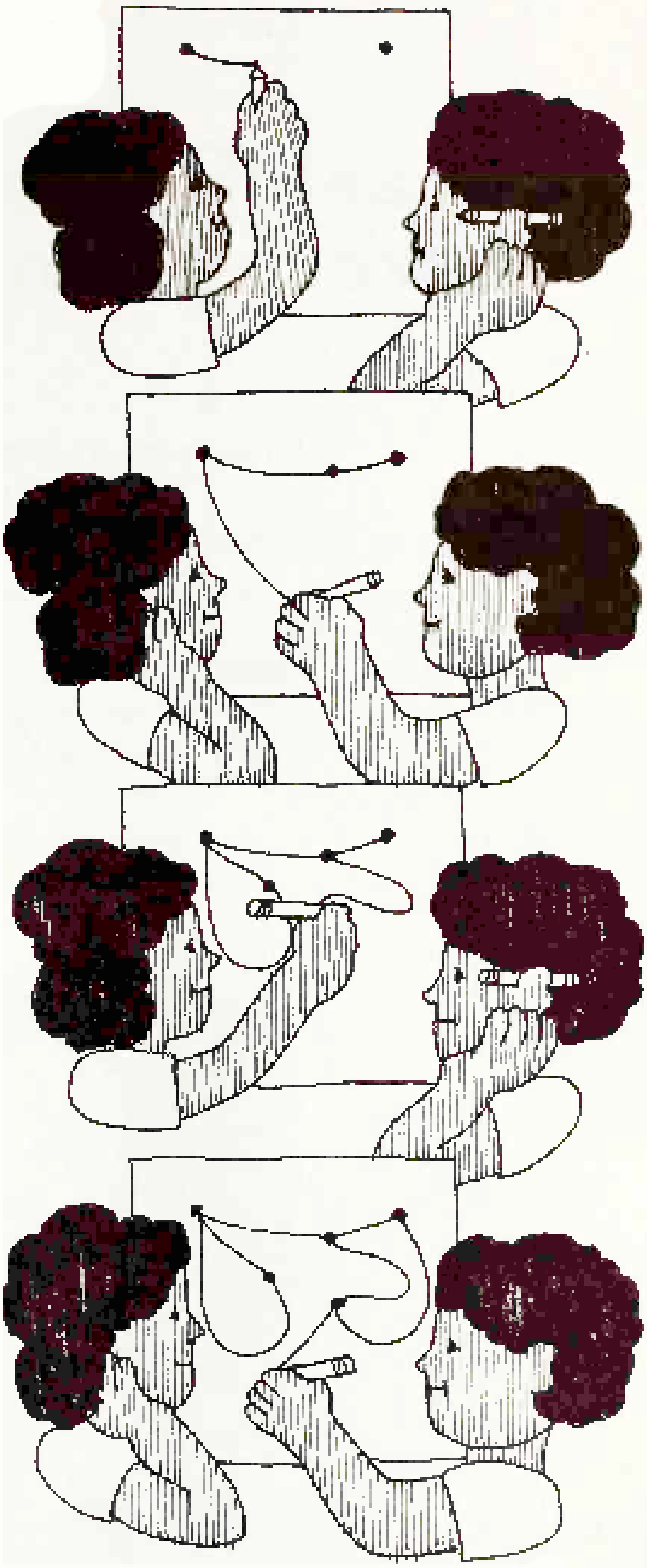






... असे करीत 16 पर्यन्त जा.

बीज अंकुरण



एक संस्थिति ज्ञानाचा जोडतंत्र खेळ. किंवा साध्या भाषेत बिंदु किंवा रेषा काढणे.

आधी दोन बिंदु दिलेले असतील. तुमची पाळी आली की हवी तशी सरळ-वाकडी रेषा काढा जी एक बिंदूत सुरू होते आणि त्याच अगर दुसऱ्या बिंदूत संपते.

तुमच्या रेषेवर एक नवा बिंदु तुम्ही काढायचा. कोणतीही रेषा स्वतःला अगर दुसऱ्या रेषेला छेद देऊ शकत नाही. एका बिंदूत तीन रेषा मिळू शकत नाहीत. जो शेवटी खेळेल (दुसऱ्या खेळाडूस जागाच उरणार नाही) तो जिंकणार. हा खेळ दोन इंग्रज गणितज्ञानी शोधला. तुम्हाला माहीत होते काय? हा खेळ किती वेळ चालू शकेल? जर सुरुवात दोन ऐवजी तीन किंवा चार बिंदु पासून झाली तर काय होईल?

केळ्याच्या बाजू

गणितावरील पुस्तकात केळीं?

काय हरकत आहे?

गणित सगळीकडे आहे. तसेच कोबी, कांदा,

सफरचंद किंवा इतर काही सुद्धा गणितात असते.

अगदी तुम्हाला नावडण्यासारखी गणिताची झेप आहे.



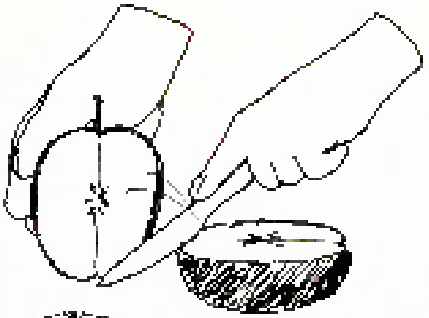
केळ्याला किती बाजू असतात?

या प्रश्नाचा आधी स्वयपाक घरात न पळता विचार करा. तुम्हाला विचार करून ठरविता येईल का की केळ्याला किती बाजू असतात? जर दुकाने बंद असतील आणि घरात केळे नसेल तर नाहीतरी तुम्हाला विचारच करून ठरवावे लागेल.

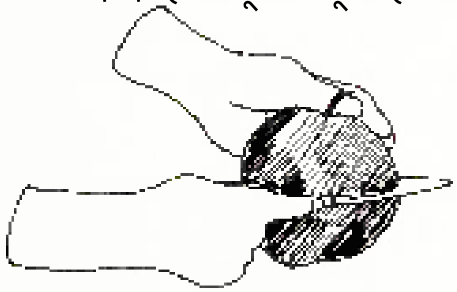
कदाचित तुम्ही मित्राला फोन करून विचारू शकाल की त्याच्या घरी केळे आहे का? प्रत्येक केळ्याला सारख्याच बाजू असतात का? केळ्याला बाजू मुळी असतातच का? केळ्याचा एखादा विशिष्ट नमूना आहे का?



आता केळ्यावरच थांबू नका. ही तर सुरुवात आहे. अनेक स्वयपकातील वस्तुचे काही नमुने असतात. त्यांची एक सममिती (Symmetry) असते. आता सफरचंद घ्या. ते कापता येते. पण समजा तुम्ही वेगळ्या पद्धतीने कापले तर कसे दिसेल?



स्वयपाक घरात घुटमळायला सुरुवात करा. कुणी स्वयपाक करीत असेल तर म्हणा ‘मी भाजी कापू का’? कांदा दोन्ही बाजूनी कापून पहा.

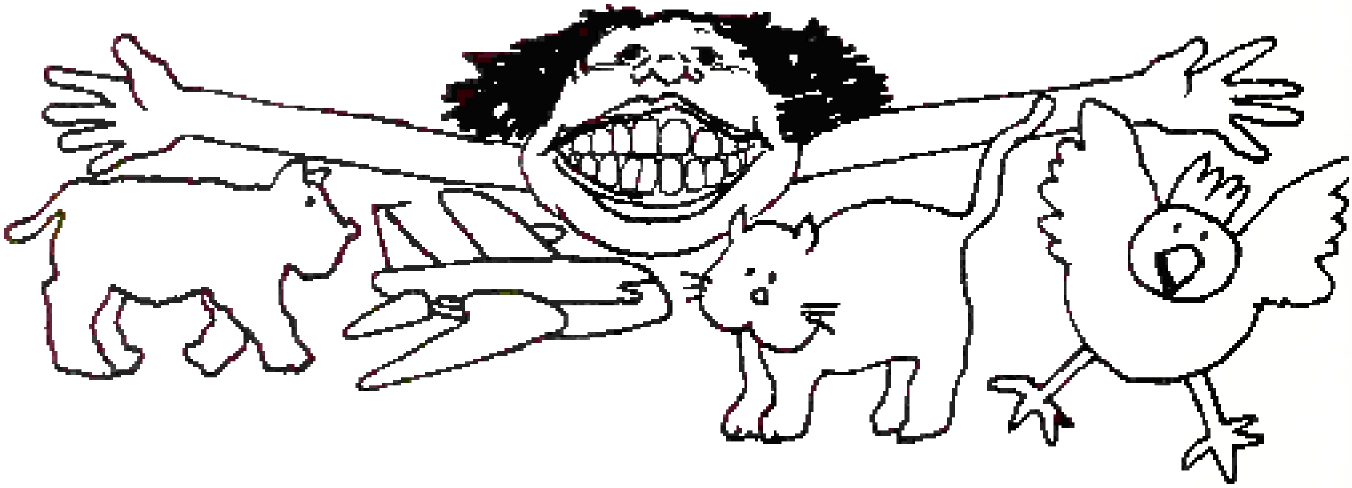


तसेच कोबी, काकडी, टोमॅटो कापून पहा. तुम्हाला विश्वास बसणार नाही एवढे संतुलन आणि सममिति पाहायला मिळेल.

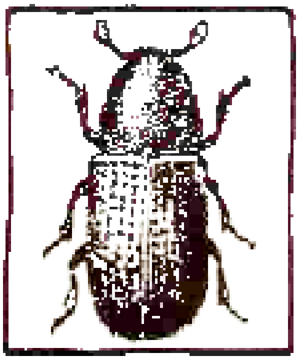


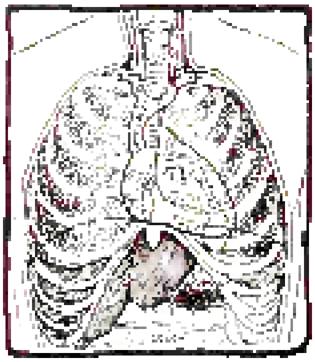
सममिति विषयी हवे तेवढे आणि जरा अधिकच

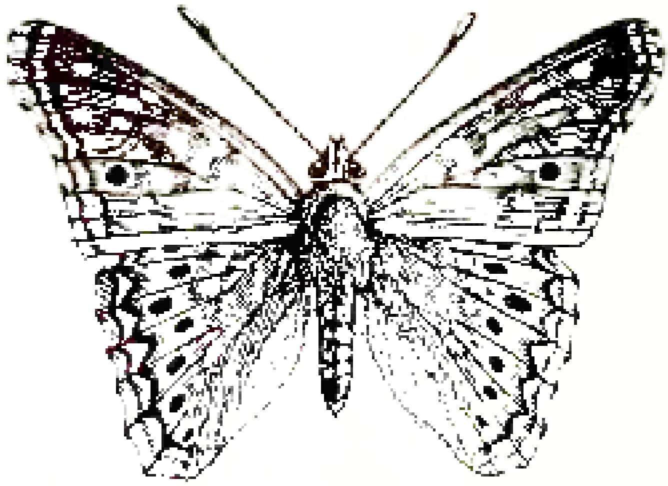
गणितज्ञांनी अनेक कल्पना केल्या आणि त्यांशी ते खेळत राहिले. पण सममितीची संकल्पना मुळात त्यांची नाही. ती जरी इकडे तिकडे चोहीकडे असली तरी गणिती मंडळी तिच्या पुढ्यात आले. जर त्यांनी ही संकल्पना पुढे नेली नसती तर आणखी कुणी नक्कीच ते काम केले असते. कदाचित एखाद्या दांतवैद्याने किंवा आणखी कुणी. सममिति इतकी सर्वत्र पसरली आहे की ती न लक्षात येणेच अवघड. तुम्ही विमानाकडे, मोटार गाड्याकडे किंवा अगदी कुत्र्या मांजराकडे पाहिलेत तरी सममिति जाणवेल.

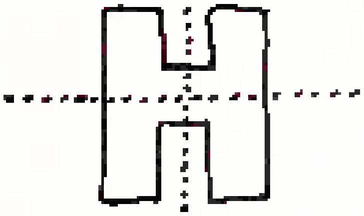


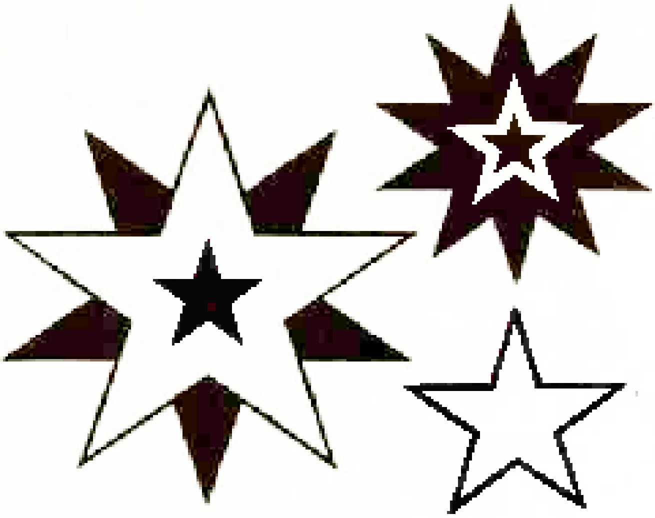
गणिती मंडळीनी जरी सममिति शोधली नसली तरी तिचे नामकरण मात्र त्यांनी केले. काहीची सममिति आरशात दिसते त्या प्रमाणे असते. त्या एका रेषेभोवती सममीत असतात. जसे फुलपाखरू.





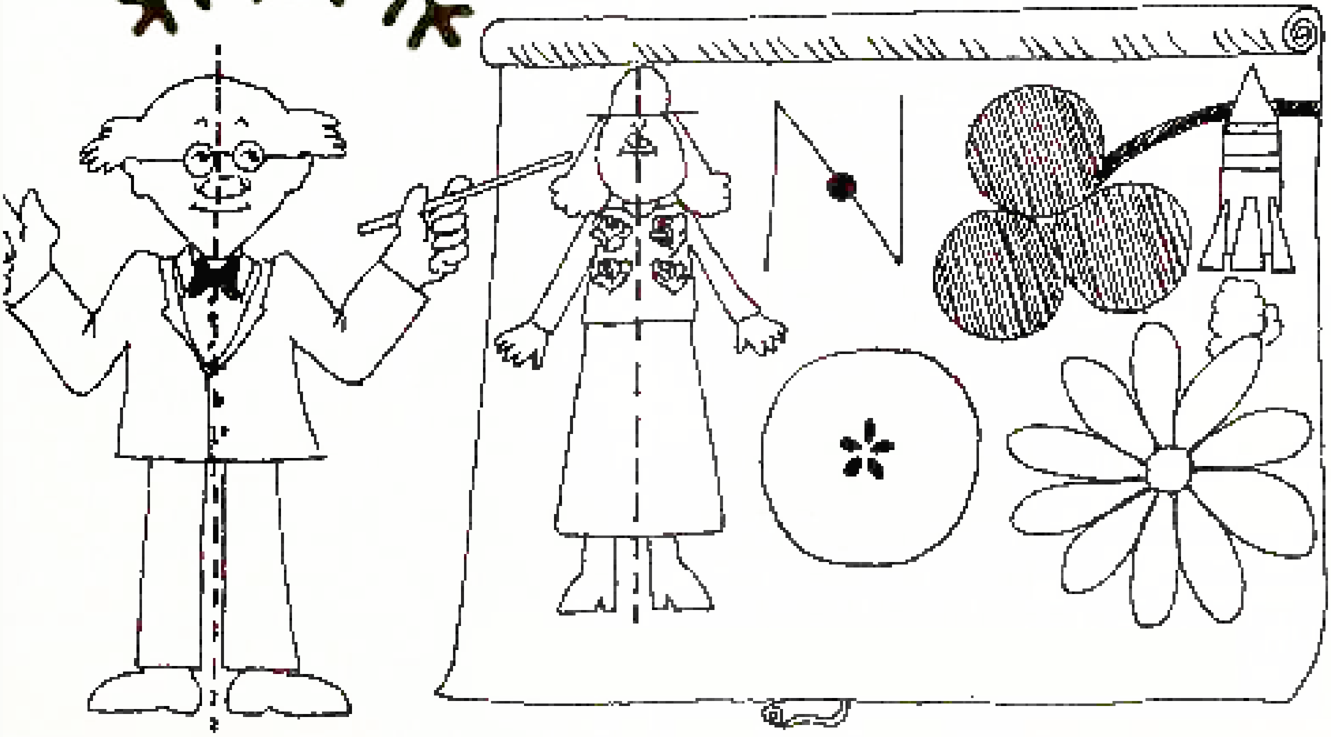




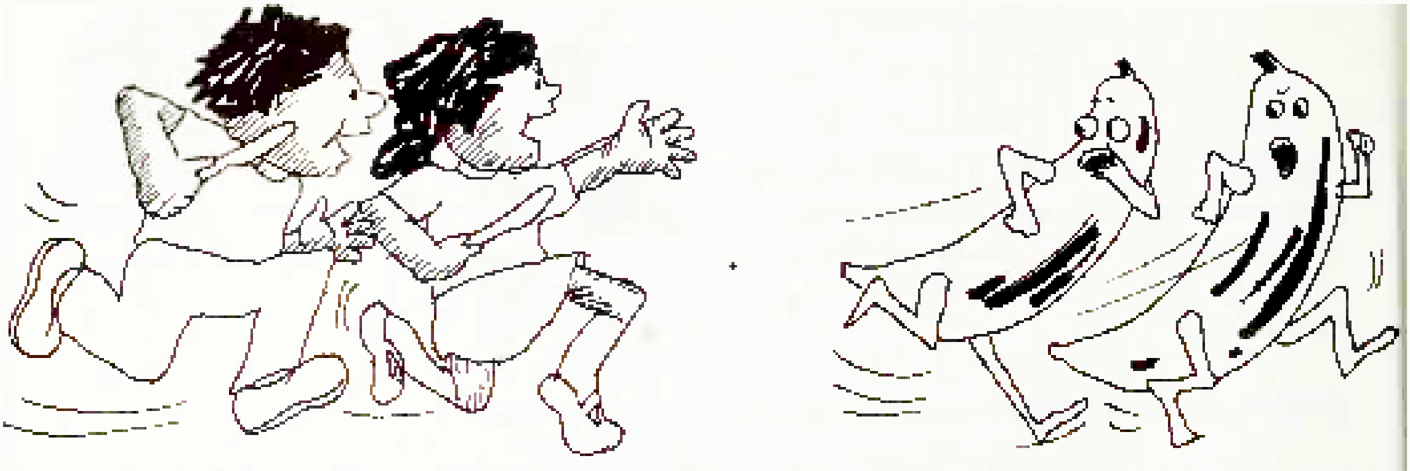




काहीना दोन रेषा भोवती सममिति
असते, जसे इंग्रजी अक्षर एच.
काहीना दोन्ही प्रकारची सममिति
असते जशी सोबतची चित्रे.
आता तुम्हीच एक सममीत आकार
शोधण्याची स्पर्धा सुरू करा.



केळे कापण्याच्या वेगवेगळ्या तऱ्हा



तुम्हाला वाटले की केळे प्रकरण संपले, हो ना? केळे कापण्याच्या काही तऱ्हा पहा.

केळ्याचे साल न काढता चित्राप्रमाणे केळे कापा. आता सालातून बाहेर येणारे काप असे दिसतील.

कोणते चित्र कुठल्या पद्धतीने कापून मिळते?



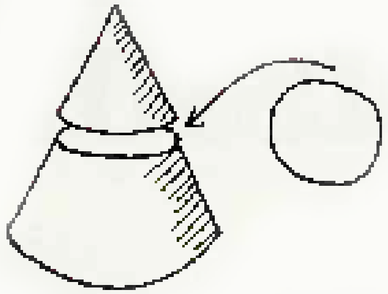


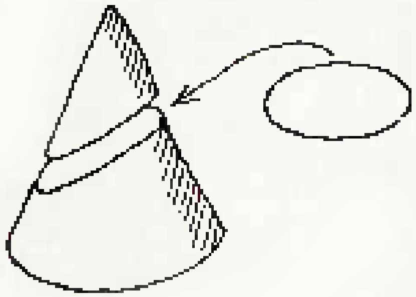
जर कुणी येऊन विचारले की काय चाललंय?
तर त्यांना तुमच्या संशोधनाविषयी सांगा. पुढे असेही सांगा की हे संशोधन ग्रीक गणिती अपोलोनीयसने अनेक वर्षापूर्वी केले होते ज्याने शंकू कापून मिळणारे छेद या विषयावर संशोधन केले होते.

आता तुम्ही शंकुच्याच मागे लागा.
चित्रातल्याप्रमाणे शंकू छेदला तर वर्तुळ मिळेल. थोडा वाकडा छेद घेतला की लंब वर्तुळ (Ellipse) मिळेल. अपोलोनीयसने आणखी दोन प्रकारचे छेद घेऊन Hyperbola आणि Parabola असे दोन आकार मिळवले.



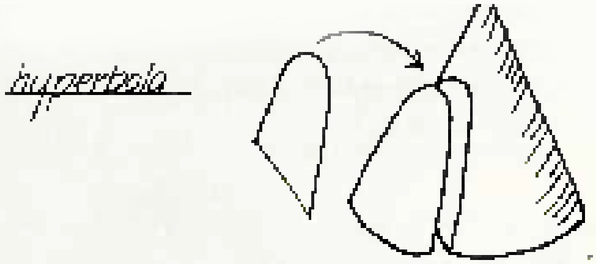
आता तुम्ही शंकुच्याच मागे लागा. चित्रातल्याप्रमाणे शंकू छेदला तर वर्तुळ मिळेल.

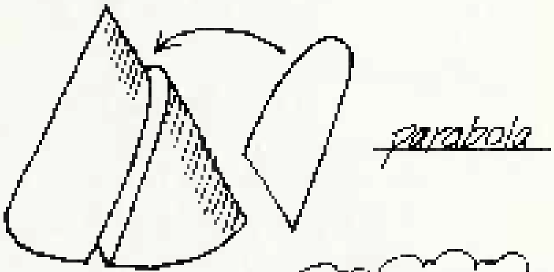


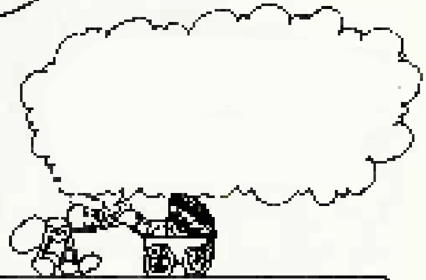


थोडा वाकडा छेद घेतला की लंब वर्तुळ (Ellipse) मिळेल.

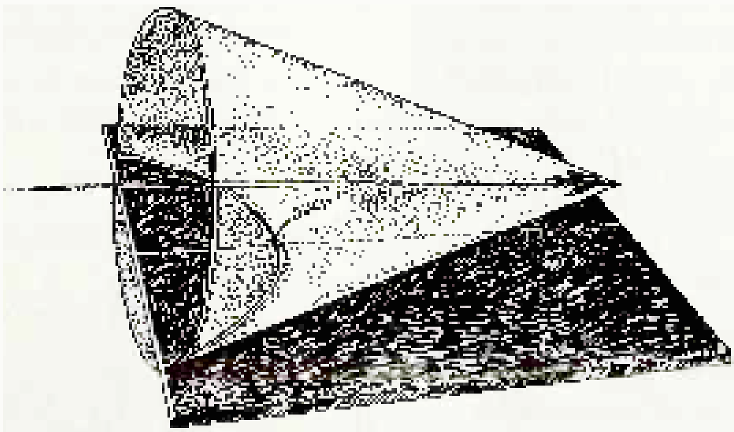
अपोलोनीयसने आणखी दोन प्रकारचे छेद घेऊन Hyperbola. आणि Parabola असे दोन आकार मिळवले







जर तुम्ही कधी उच्चरव ध्वनि गर्जना (sonic boom) ऐकली असेल तर तुम्हाला Hyperbola काय करू शकतो हे कळेल. शंकूचा Hyperbolic छेदक जेव्हा जमिनीला भिडतो तेव्हा अशी गर्जना होते.



केळ्याच्या कापापासून काय काय ज्ञान मिळते ते अजबच!

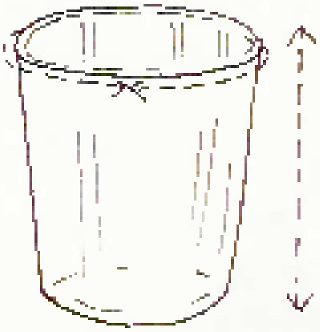
भांडी विसळणे आणि कोरडी करणे

मागे भांडी विसळताना आपण एक युक्ति केली ती विसरला नसालंच.
आता काचेची भांडी कोरडी करताना एक नवी कल्पना घ्या.



एक प्रश्न: ग्लास घ्या आणि ऊंची जास्त लांब की तोंडाशी असणाऱ्या वर्तुळाकाराची लांबी जास्त? बहुतेक तुम्हाला असा एकही ग्लास सापडणार नाही ज्याची ऊंची घेरापेक्षा जास्त आहे. चार पाच वेळा प्रयोग करून पहा आणि खात्री करून घ्या.



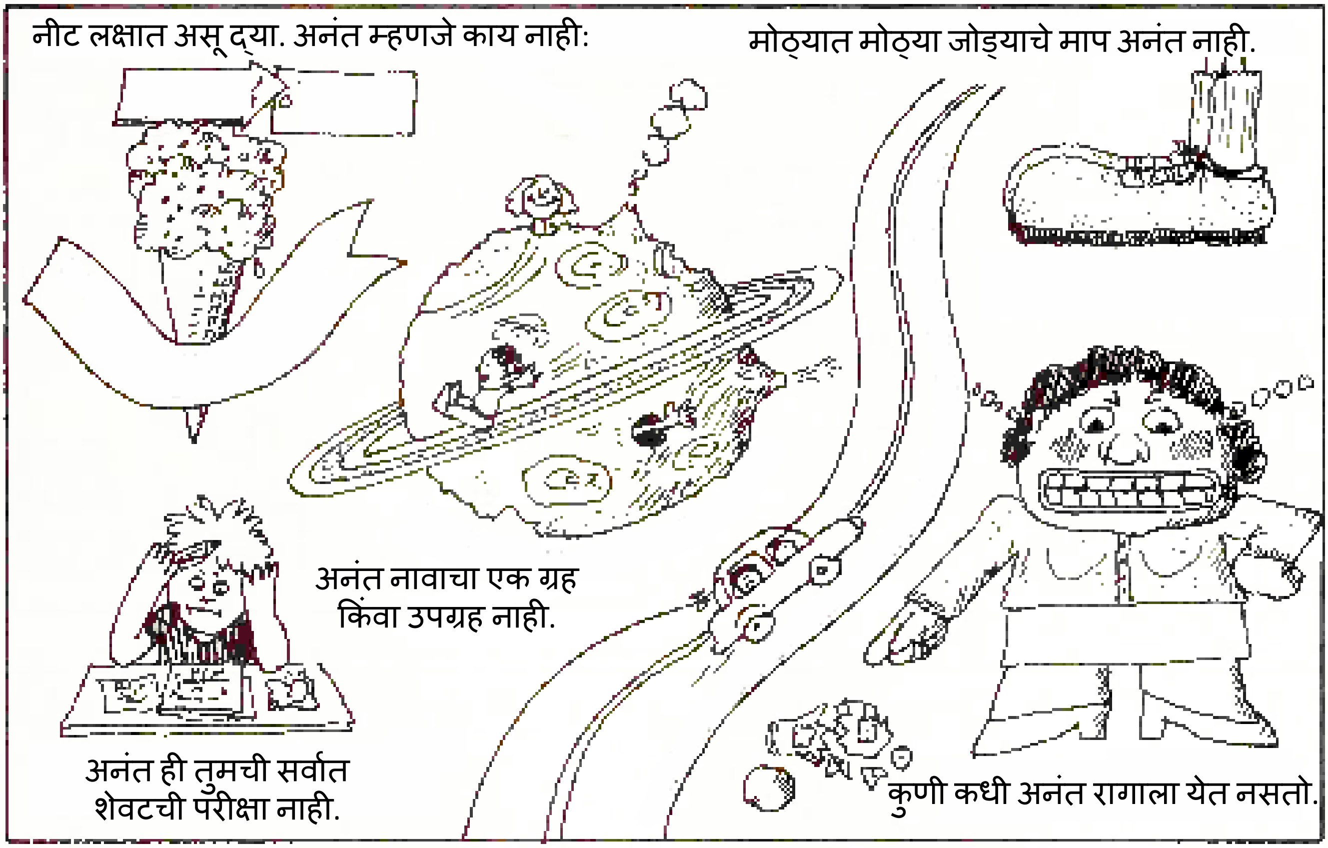


आता पैजेवर म्हणा, "कोणता ग्लास असा आहे ज्याची लांबी घेरापेक्षा अधिक आहे. आणि कुणी पैज घेतलीच तर तुम्ही जिंकाल आणि भांडी कोरडी करण्याच्या कामातून सुट्टी! हे एकदाच करता येईल, म्हणून आवश्यक तेव्हाच ही कल्पना वापरा.

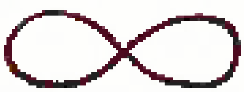


अनंत (Infinity) अशी जागा नाही

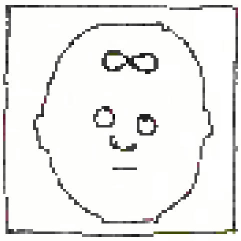
अनंत हे काही एक ठिकाण नाही. मुख्य म्हणजे अनंत ही सर्वात मोठी संख्या नाही किंवा सर्वात मोठी अशी काही एक वस्तुही नाही. खरे तर अनंत ही वस्तुच नाही. अनंत ही एक संकल्पना आहे. जे अनंत आहे ते कायम कार्यान्वित राहते. याला बाजू नाही, टोक नाही.



अनंत म्हणजे काय आहे: ही या पुस्तकातली सर्व-कठीण संकल्पना आहे. कारण ही संकल्पना तुम्हाला पाहता येत नाही, अनुभवता येत नाही. तिचे चित्र ही काढत येत नाही. अनंत ला कसे चिन्हांकित करता येईल? तर ते मात्र येथे दाखविले आहे.



जर तुम्ही ही संकल्पना डोक्यात ठेऊन एखाद दूसरा दिवस घालविला आणि पुनः काही दिवसानी तसेच केले, तर ही संकल्पना तुमच्या पचनी पडेल.



आणि मग तुम्ही स्वतः विषयी खुष व्हायला हरकत नाही. कारण चांगले गणीतज्ञ सुद्धा याहून जास्त फार काही करू शकत नाहीत.



10+3=1

केव्हा असते?

आता विचार करा. 10 वाजले आहेत.

3 तासानंतर किती वाजतील?

1. होय ना? म्हणजे स्वयपाक



घरात 10+3, किंवा 11+2 किंवा 9+4

या सगळ्याचे उत्तर 1 असे आहे.

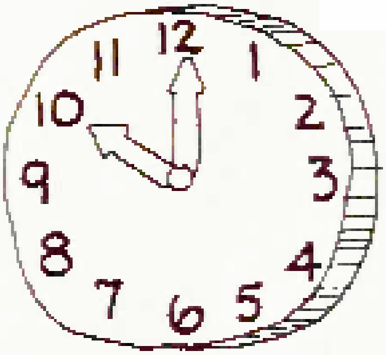
घाड्याळाचे गणित

तसे टाकाऊ नाही.

त्याला गणिती लोक

मापक (modulo) 12

गणित म्हणतात.



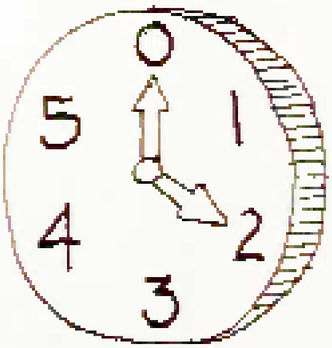


मापक गणित (Modulo Arithmetic) आपण नकळत नेहमी वापरतो.

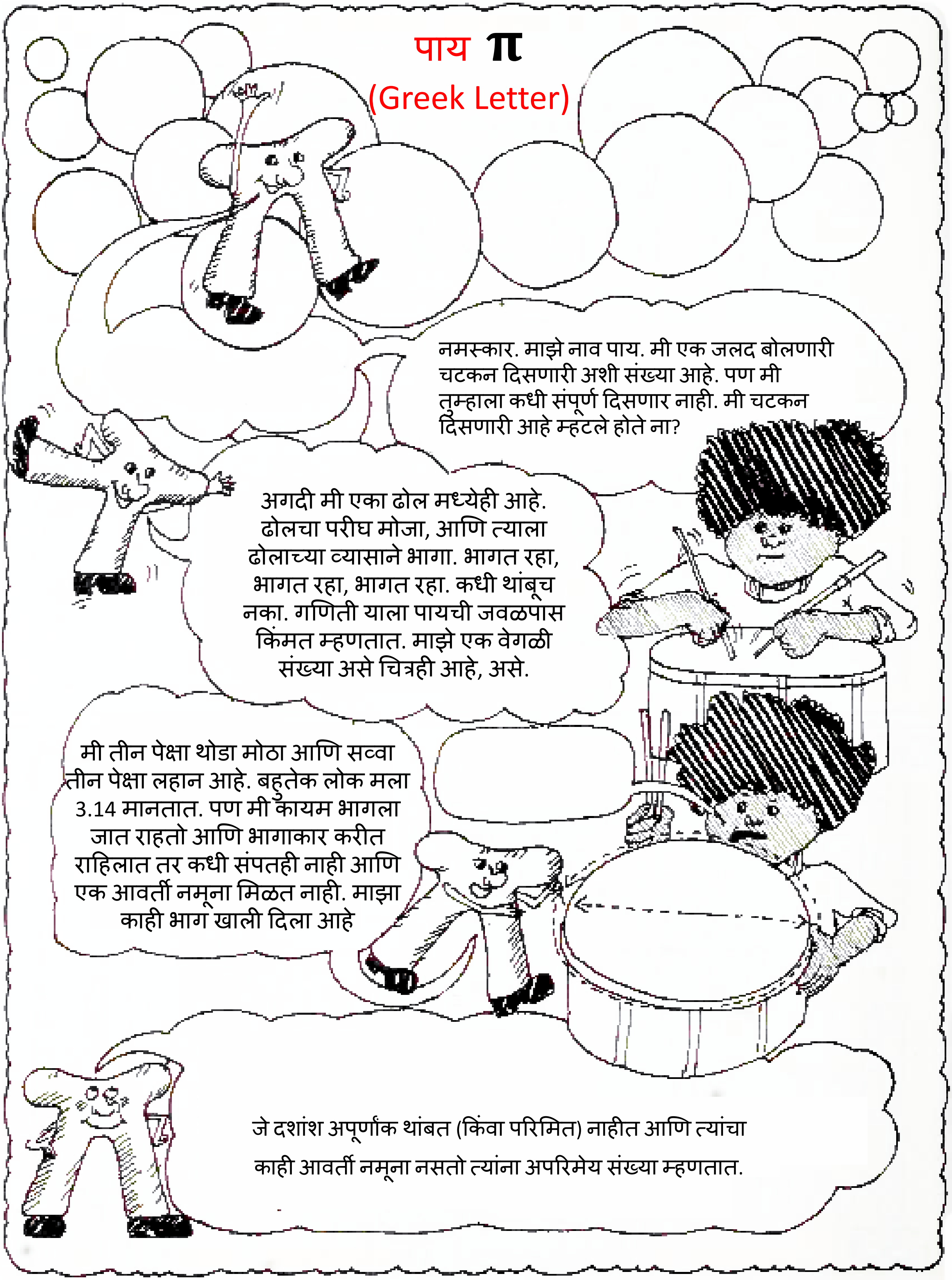
जसे आठवडे मापक 7, महीने मापक 12 आपण वापरतो. उदा.,

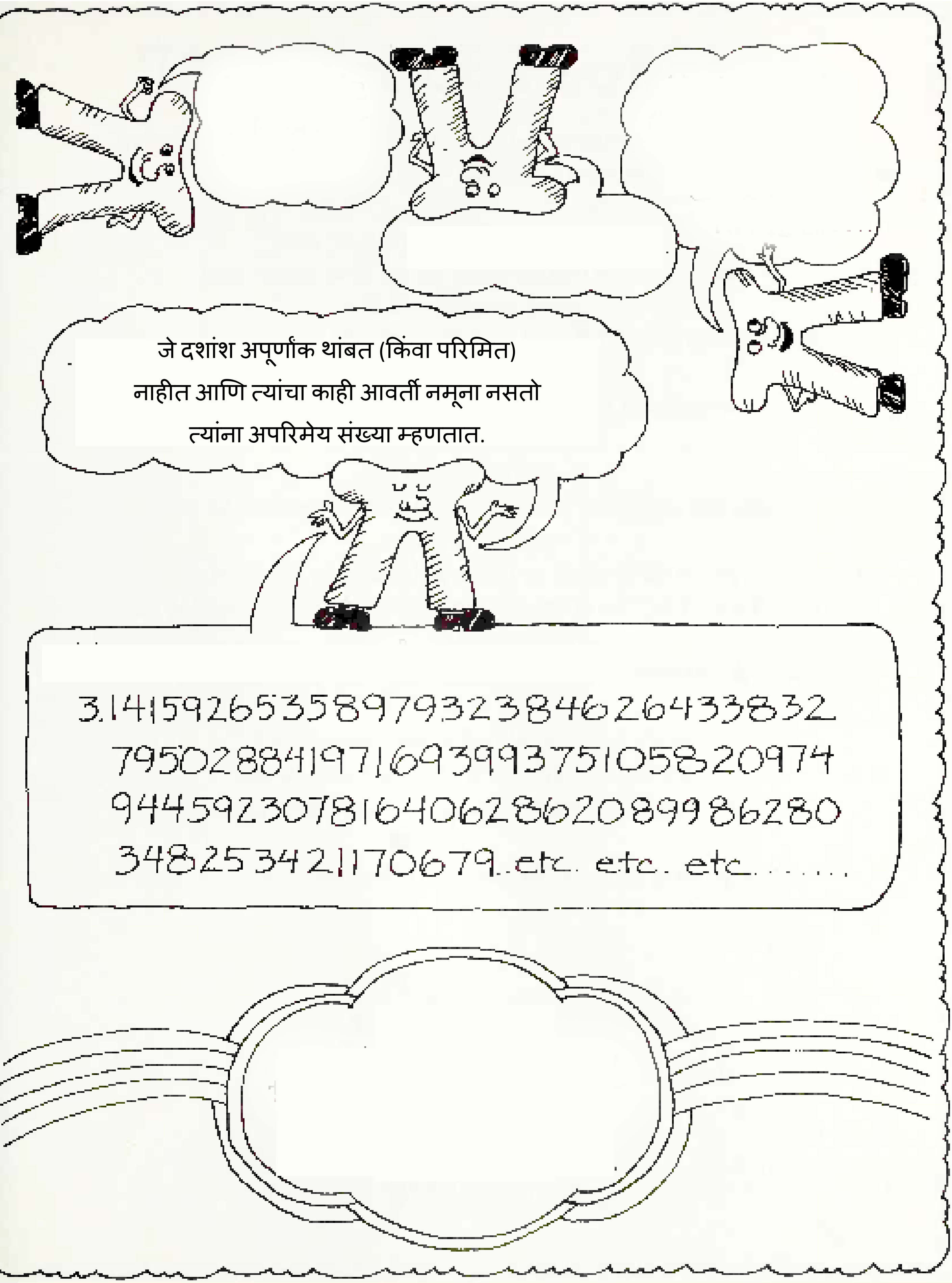
रविवारी आपण ठरविले की पुनः दहा दिवसांनी भेटायचे, तर आपण भेटणार

एक बुधवार आड पुढच्या बुधवारी. कारण 10=3 (मापक 7).



पाय π
(Greek Letter)

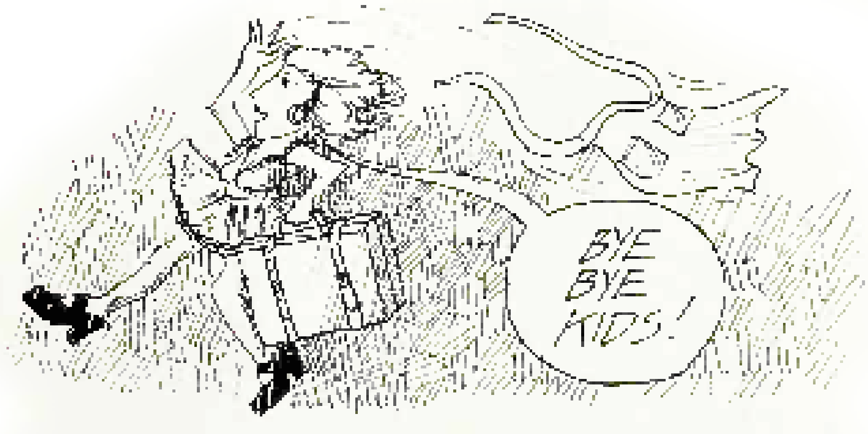



जे दशांश अपूर्णांक थांबत (किंवा परिमित) नाहीत आणि त्यांचा काही आवर्ती नमूना नसतो त्यांना अपरिमेय संख्या म्हणतात.
3.1415926535897932384626433832
79502884197169399375105820974
9445923078164062862089986280
348253421170679.etc. etc. etc......

संभाव्यतेची कला

आता तुम्हाला गणितात बऱ्यापैकी गम्य आले आहे. तर त्याचा काही उपयोग करूया. तुम्हाला असे वाटते का की येत्या एक मिनिटात भूकंप होणार आहे? तुमचे उत्तर 'हो' असे असेल तर मग तुम्ही हे पुस्तक घेऊन काय बसला आहात? पळा. आणि जर उत्तर 'नाही' असेल तर तुमची संभाव्यतेची काही स्वतंत्र कल्पना आहे. म्हणजे कोणची?
तर भर उन्हात बाहेर पडताना छत्री न घेण्याची. किंवा आई जेवण तयार न करता घर सोडून परदेशातल्या नाटक कंपनीत नाचायला जाईल अशी चिंता करीत न बसण्याची. तुम्ही तुमची संभाव्यतेची कल्पना बरोबर आहे असे मनाशी बाळगून अशा गोष्टीची चिंता देखील करीत नाही.

पण गणिती मंडळींच्या वेगळ्या कल्पना असतात. ते चक्क संभाव्ययतेचा सिद्धांत (Theory of Probability) असे शास्त्र निर्माण करतात. तुम्ही त्याला फक्त चांगला अंदाज करणे असे म्हणता.



बरोबर अंदाज करणे

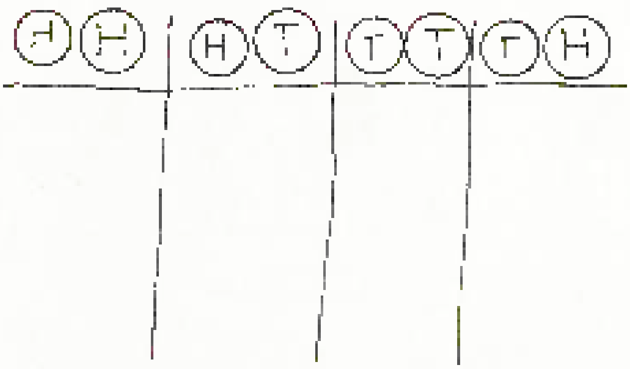




समजा तुम्ही एक नाणेफेक केली. तर खाली पडताना ते किती वेळ चित आणि किती वेळ पट पडते? प्रत्येक शक्यता सारखीच आहे, म्हणजे चित ची शक्यत ½ आणि पट ची शक्यता ½ हे आपण समजू शकतो. पण नेमके अर्धा वेळ चित आणि अर्धा वेळ पट पडत नही हा अनुभव असतो. जर ते बरोबर अर्ध्या वेळा चित पडणार असेल तर मग आपण नाणेफेक करणारच नाही. ते अगदी 100 टक्के बरोबर पडत नाही म्हणून तर आपण नाणेफेक करतो आणि काही लोक त्यावर जुगार खेळतात.



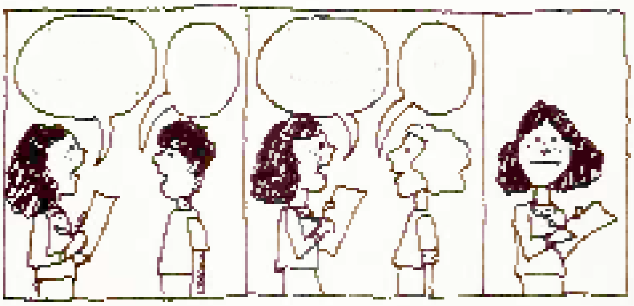
आता समजा आपण दोन नाणी एकच वेळी उडवली तर ती खाली काशी पडतील? चित्रात दाखविल्याप्रमाणे एकूण चार शक्यता आहेत. पैकी दोन्ही चित हे चारापैकी एकदाच घडते. म्हणजे शक्यता झाली ¼. आता एक तक्ता बनवा आणि दोन नाणी फेकायला सुरुवात करा. कोणच्या नाण्याची कोणती बाजू वर येते हे समजण्यासाठी वेगळी ओळखू येतील अशी दोन म्हणजे 25 व 50 पैशाची नाणी वापरा. आता अनेक वेळा प्रयोग केल्यावर तक्ता बनवा.

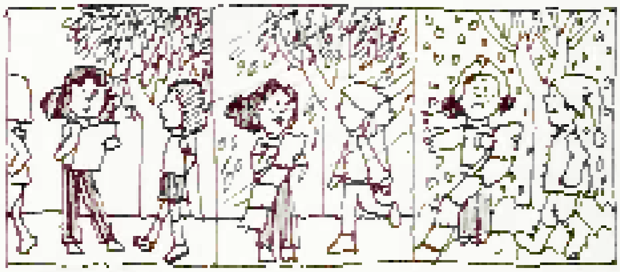


सांभाव्यता ठरवा



एकच दिवशी दोन मित्रांचे वाढदिवस येण्याची शक्यता किती? वाटते तितकी कमी नाही. जर तुम्हाला 30 मित्र मैत्रिणी असतील तर ही शक्यता ½ पेक्षाही जास्त आहे. जे गणिती संभाव्यतेचा अभ्यास करतात त्यांनी हे चक्क सिद्ध केले आहे. स्वतः करून पहा. सर्व मित्रांचे वाढदिवस लिहून काढा, तुम्हाला दोन मित्र एकाच वाढदिवसाचे सापडतील.





काही वेळा तर पटकन सापडतील.
जर तुम्ही हा प्रयोग अनेक वेळ केला तर असे घडण्यासाठी सुमारे 30 लोकाना विचारावे लागेल.
जर तुम्ही कंटाळलात तर सोडून द्या.
मी सांगतो ते बरोबर आहे असे माना.



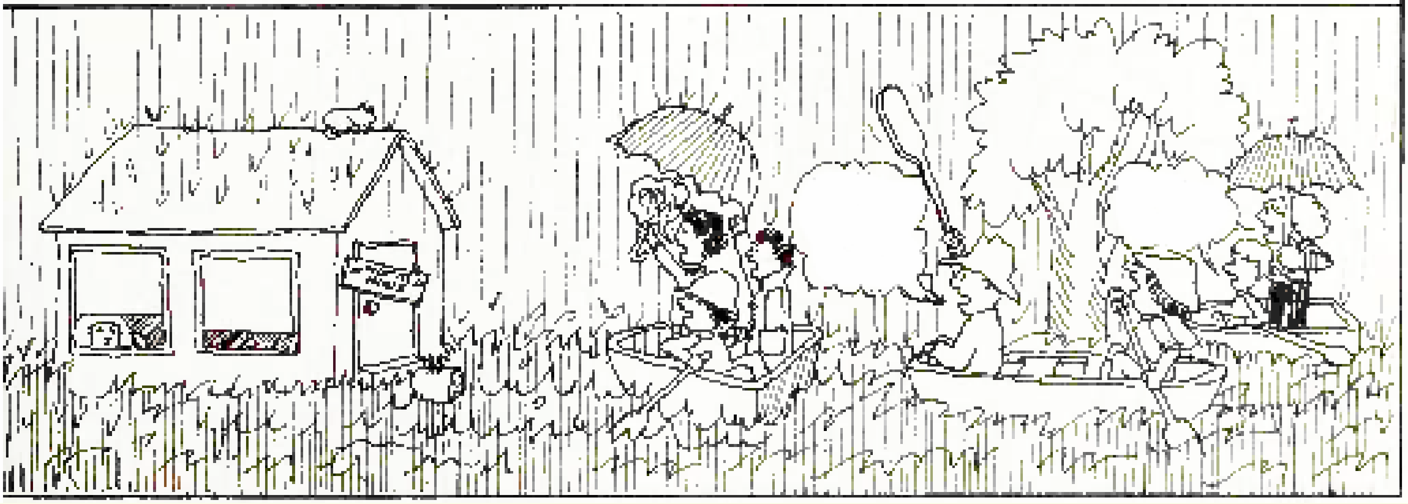
वाढदिवस विमा योजना



तुम्हाला एखादी विमा कंपनी काढायला कसे आवडेल? समजा तुम्ही विमा विकायला सुरुवात केली की वाढदिवसाला पाऊस पडणार नाही. पडला तर तुम्ही ठराविक पाचशे रुपये देणार. जर नाही पडला तर तुम्ही विम्याच्या दरातून नफा मिळवणार. बहुतेक मोठी मंडळी कुठला ना कुठला विमा काढीत असतात. मोटारीचा, आयुष्याचा, आरोग्याचा, इ. इ. विमा कंपनी संभाव्यतेचे गणित करून विम्याची किंमत ठरवितात.

त्यासाठी कंपन्या बरेच संख्याशास्त्र वापरतात. तुमच्या विम्याच्या कल्पनेसाठी तुम्हाला वर्षात पाऊस किती दिवस पडतो, कोणत्या महिन्यात जास्त पडतो, वगैरेचा अभ्यास करावा लागेल. आणि मग विम्याचा दर ठरवावा लागेल. तुमचा दर किती असेल, किती विमाधारक मिळाले म्हणजे तुमची कंपनी फायद्यात रहू शकेल, हे सर्व पहावे लागेल. हा व्यवसाय किफायतशीर होऊ शकेल काय?

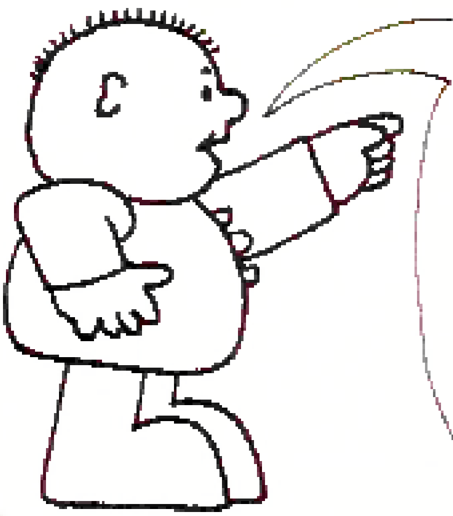




उलट-सुलट लेखन



काही वाक्ये अशी असतात की उलट वाचले अगर सुलट वाचले तरी वाक्य बदलत नाही. उदाहरणार्थ, 'रामाला भाला मारा' किंवा 'चिमा काय कामाची?' हा शब्द समूह उलट आणि सुलट सारखाच आहे. अशा वाक्याना Palindrome म्हणतात. आपण 'उलट-सुलट' असे म्हणू. जुन्या मराठी आणि संस्कृत कवींना अशा लिखणाची हौस होती. आपण गणितासाठी उलट-सुलट संख्या म्हणजे अशा संख्या ज्या उलट आणि सुलट सारख्याच असतात वापरू. गंमत म्हणजे अशा संख्या आपण बेरजेतून बनवू शकतो.

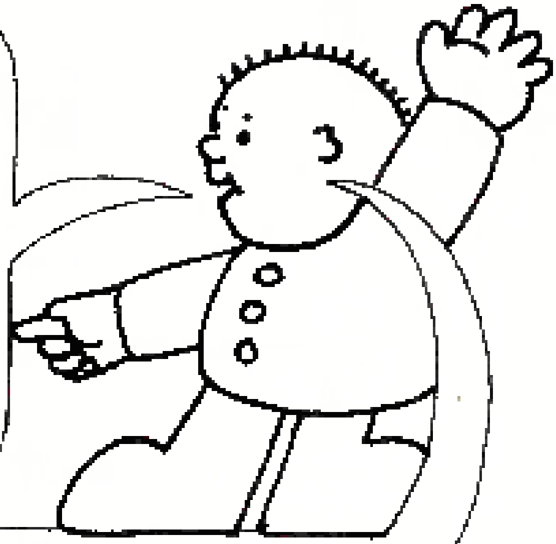


उदा. 137+731= 868, ही उलट-सुलट संख्या आहे. काही वेळा असे दोन-तीन वेळ करावे लागते.

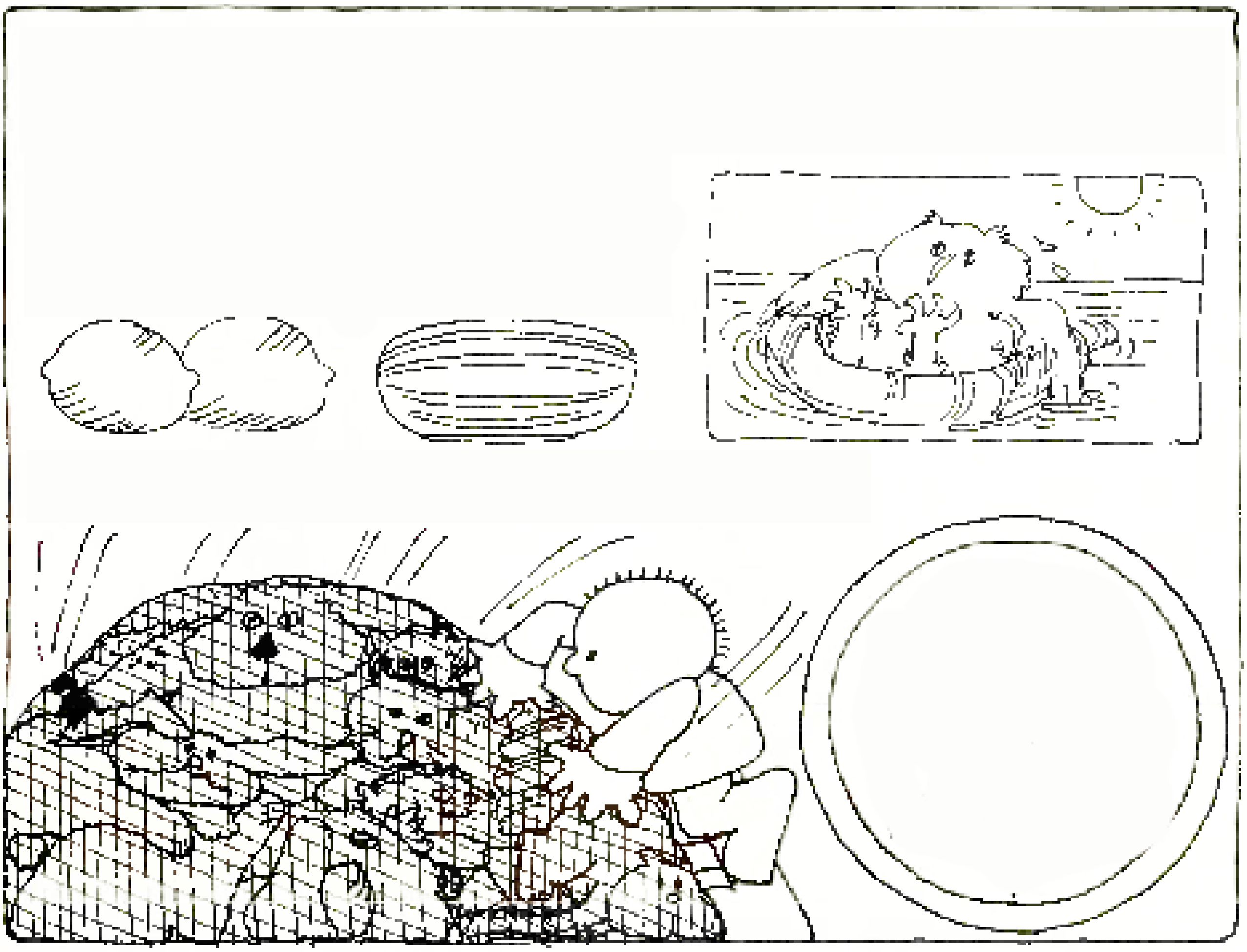
$$\begin{array}{r} 137 \\ +731 \\ \hline 868 \end{array}$$

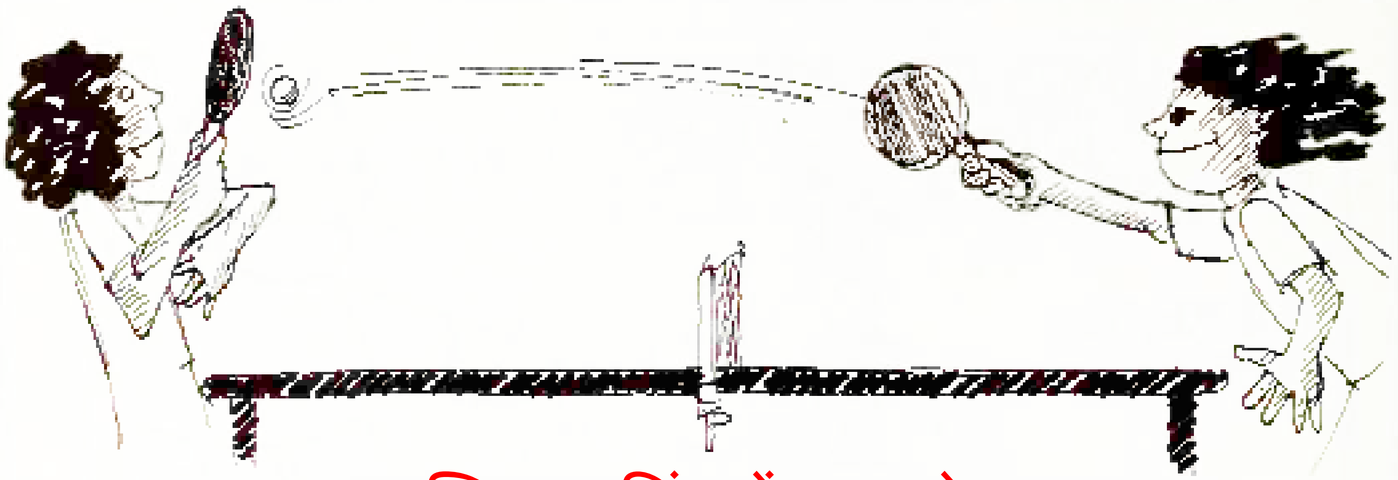
जसे, 68 ही संख्या घ्या. तिची उलट करून दोहोंची बेरीज कर. 68+86=154. आता पुनः तसेच कर. 154+451=605. पुनः 605+506=1111 ही आली उलट-सुलट संख्या.

```
  68
 +86
 154
+451
 605
+506
1111
```



काही वेळ मात्र खूप जास्त वेळा करावे लागते. 89 या संख्येपासून उलट-सुलट संख्या आणा. जास्त कागद लागला तरी कंटाळू नका.



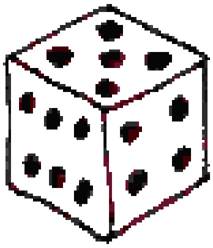


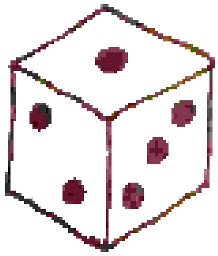
गणित हा पिंगपोंग चा खेळ

तुम्ही पिंगपोंग का खेळता? कारण मित्राच्या घरी गेला आहात,
त्याच्या तळघरात पिंगपोंग आहे आणि तो म्हणतो ‘खेळायचा का पिंगपोंग’?
आणखी एक कारण; काही तरी असे असावे ज्यात आपण जिंकू शकतो. किंवा एखादा
म्हणतो खेळता येतो का तुला पिंगपोंग? आणि तुम्ही त्याला सहज हरवता.
पिंगपोंग खेळण्यासाठी या पैकी कुठलेही कारण असू शकेल.
खरे तर पिंगपोंग आपल्याला शाळेत नेत नाही. पिंगपोंग चा चेंडू खाता येत नाही.
फक्त खेळताना मजा येते. जशी पिंगपोंग खेळण्यास अनेक कारणे
आहेत तशीच गणितासाठीही अनेक कारणे आहेत.



डुकरे

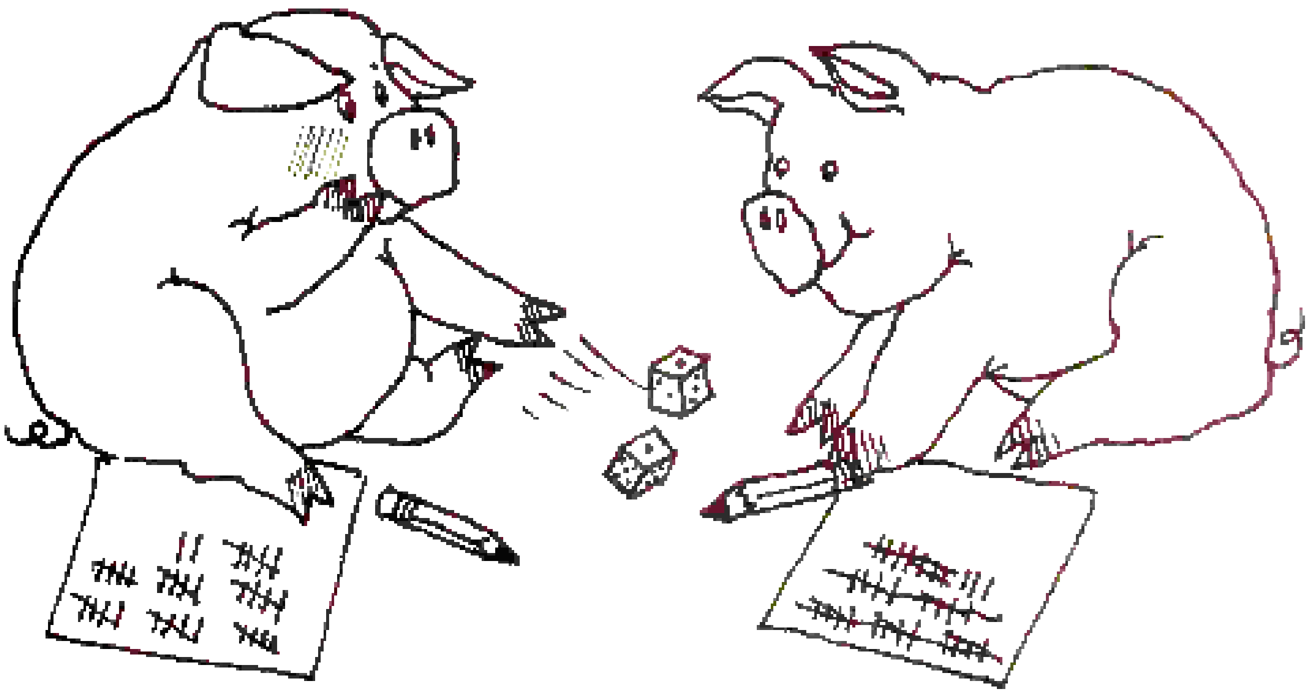




हा एक चांगला खेळ आहे. यात थोडेसे संभाव्यतेचे गणित माहीत असायला हवे आणि फार मूर्ख नसायला हवे. दोन फासे (घन ठोकळे ज्यांच्या सहा बाजूवर एक, दोन, तीन,... ते सहा ठिपके असतात आणि त्यांना Dice म्हणतात.) खुळखुळून टाका. दोन्ही फास्यावरील ठिपक्यांची बेरीज करा. ही बेरीज एकूण 100 होईपर्यंत खेळत रहा.

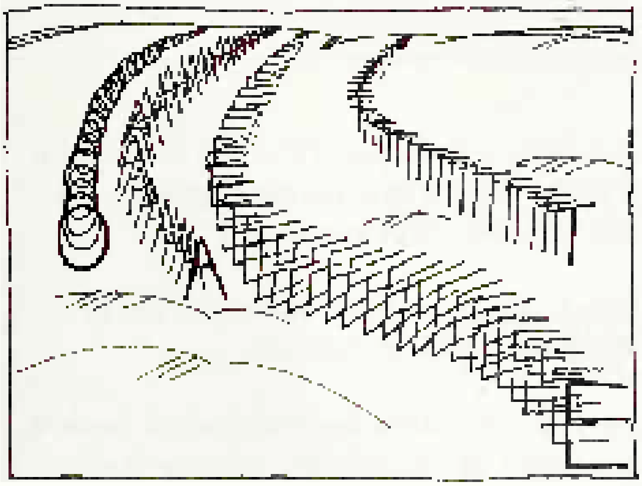
पण एक अट आहे. कुठल्याही एका फास्यावर एकच ठिपका आला की तो डाव गेला आणि पुन्हा खेळा. जर दोन्ही फास्यावर एक ठिपका आला तर तुमची बेरीज शून्य होते आणि पुनः सुरुवात करा.

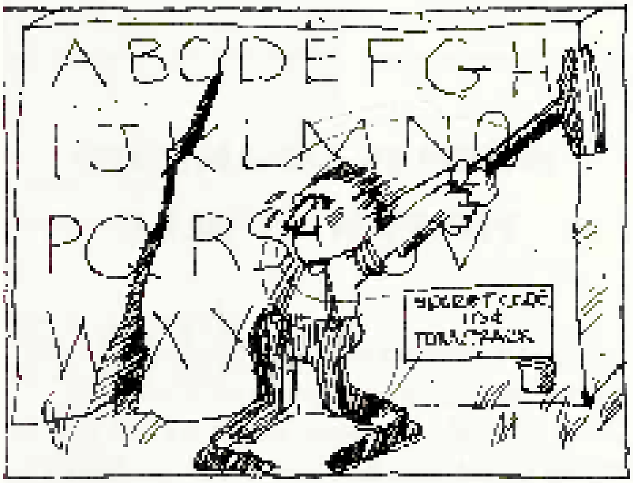
खेळताना बेरीज पक्की असली पाहिजे. पण त्या पेक्षा महत्वाचे असे की एक ठिपका किती वेळ येतो याची अंदाजे माहिती हवी. आणि दोन्ही फासे एकच ठिपका दाखविण्याची शक्यता माहिती हवी. नशिबाने फासे योग्य पडणे कितपत शक्य आहे?



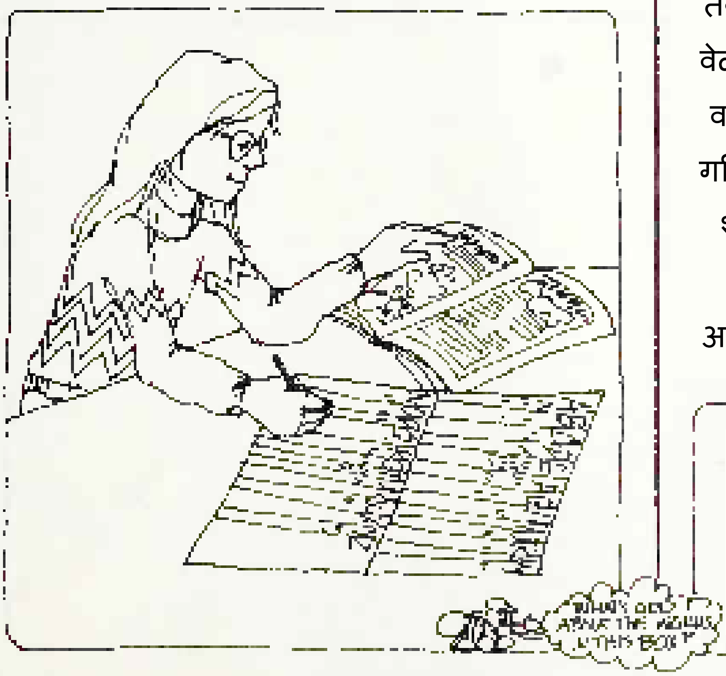
इंग्रजी अक्षरांची शक्यता

तुम्ही इंग्रजी लिहू लागलात तर सर्वात जास्त वापरले जाणारे अक्षर आहे E.
त्याच्या खालोखाल येणारी अक्षरे म्हणजे T, A, O, आणि N.
कमीत कमी वापरली जाणारी अक्षरे आहेत Q, K, X, Z आणि J.





एक तक्ता बनवा सर्व 26 अक्षरांचा. एका इंग्रजी पुस्तकातील कोणत्याही पानावर येणारे प्रत्येक अक्षर या तक्तयात मोजणीसाठी ठेवा. जेव्हा प्रत्येक अक्षर किती वेळा आले याची मोजणी झाली की तुम्हाला सर्व अक्षरांचे वारंवारता वितरण (Frequency Distribution) मिळेल. गणितात अशा वारंवारता वितरणाचा उपयोग कूट संकेत शोधून काढण्यात होतो. एखाद्या मित्राला कूट भाषेत एखादे किंवा दोन चार वाक्ये लिहायला सांगा. आता आपल्या वारंवारता वितरणाचा उपयोग करून कूट भाषा ओळखण्याचा प्रयत्न करा.



जर तुम्हाला एका गणिताचे उत्तर मिळाले की मग ती गंमतच संपते. जर तुम्हाला 100 प्रश्न सोडवायचे आहेत तर मग ते ठीक आहे. खऱ्या गणित तज्ञाला शेवटचा प्रश्न सोडवणे म्हणजे एका चॉकलेट पेयाचा शेवटचा घोट घेण्यासारखे आहे. जसे आपल्याला वाटते की पेय संपूच नये, तसे त्याला वाटते गणित प्रश्नही संपूच नयेत.

तुम्ही आता या पुस्तकाच्या अशा ठिकाणी आहात जेथे चॉकलेट पेय संपल्याचे वाईट वाटते. हे या पुस्तकाचे शेवटचे पान आहे. आता तुम्हाला गणितात कमी कच्चे आहोत असे वाटते का? जर हे पुस्तक संपल्याचे वाईट वाटत असेल तर तुम्ही गणितात मुळीच कच्चे नाही आणि आता खुष व्हा. या जगात अनेक गणिती प्रश्न आहेत आणि तुम्ही जोमाने त्यांच्याशी भिडा.